



Yedek Parça Envanter Yönetiminde Kurulu Sistem Bilgisinin Varlığında İkincil Marketlerin Optimum Şekilde Kullanılması

Program Kodu: 3501

Proje No: 118M477

Proje Yürütücüsü:
Dr.Öğr.Üy. Mustafa HEKİMOĞLU

Araştırmacı(lar):
Doç. Dr. Deniz KARLI

Bursiyer(ler):
Ali KÖK
Zülal İŞLER

ARALIK 2020
İSTANBUL

Önsöz

Ürünlerin kendisi yerine o ürünlerin kullanılması ile ortaya çıkarılan hizmetlerin önem kazandığı günümüz iş dünyasında, hizmet üretiminde kullanılan sermaye mallarının güvenilir ve etkin çalışması firmaların rekabet avantajını belirleyen en önemli faktörlerden biri haline gelmiştir. Bu durum sermaye malı üreten firmalar için satış-sonrası hizmetlerdeki kalitenin artırılması ve bu pazardaki doğal lider pozisyonunun olabildiğince uzun süre korunmasını bir gereklilik haline getirmiştir. Satış sonrası hizmetlerin en önemli girdilerinden biri olan yedek parçanın üreticisinden bakımın gerçekleştirildiği kullanım noktasına sorunsuz aktarılabilmesi, müşteri memnuniyetinin en önemli bileşenlerindedir. Ayrıca kar-marjları çok daha yüksek olduğu için yedek parça satışlarının aksamadan devam ettirilebilmesi firmanın karlılığı ve rekabet gücü için çok önemlidir. çok arttırmaktadır. Yedek parça tedarik zincirine yönelik planlamanın, sahada çalışan ana ürünün sayısının arttığı ve azaldığı zamanlarda planlanabilmesi talepdeki değişimlerin (nonstationarity) dikkate alınmasını gerektirmektedir.

118M477 proje numarası ile TUBITAK ARDEB 3501 Kariyer Geliştirme Programı kapsamında desteklenmiş bu projede artan ve azalan sermaye malları için, yedek parça ticaretinin ikincil marketler kanalıyla da sürdürülebildiği yedek parça tedarik zincirinde envanter kontrol politikaları incelenmiştir. Bununla beraber projede geliştirilen teorik sonuçların farklı alanlara da birkaç uygulaması sunulmuştur.

Projede gerçekleştirilen araştırmayı yürüten araştırmacılar, Dr.Öğr.Üy. Mustafa Hekimoğlu ve Doç.Dr. Deniz Karlı, olarak projenin sorunsuz yürütülmesi ve projedeki bursiyerleri olan, Ali Kök ve Zülal İşler, araştırmaya sağladıkları katkılar için teşekkürlerimizi sunuyor ve onlara gelecek akademik kariyerlerinde başarılar diliyoruz.

Son ve en önemli olarak aile yaşantımızda bizlere destek veren eşlerimiz, Dr. Başak Savun-Hekimoğlu ve Çiğdem Ferkan Karlı'ya, her zaman yanımızda durup çocuklarımız, İrmak Hekimoğlu ve Kuzey Karlı, için muhteşem anneler oldukları için teşekkürü bir borç biliriz.

Mustafa Hekimoğlu

Deniz Karlı

İçindekiler

Önsöz	i
Tabloların Listesi.....	iv
Figürlerin Listesi.....	vi
ÖZET	viii
ABSTRACT.....	ix
1. KURULU SİSTEM SAYISINA BAĞLI TALEBİN MODELLENMESİ.....	1
1.1. Artan Kurulu Sistemler İçin Durağan Olmayan Talebin Modellenmesi.....	1
1.1.1 Tanımlar ve Koşullu Beklentiler	2
1.1.2. Kümülatif Talep	6
1.1.3. Simülasyon Sonuçları – Kümülatif Talep	10
1.1.4. Marjinal Talep	12
1.1.5. Verilen Bir Zaman Periyodunda Sıfır Talep Gözlenme Olasılığı	14
1.1.6. Simülasyon Sonuçları – Marjinal Talep	17
1.2. Azalan Kurulu Sistemler.....	23
1.2.1. Tanımlar ve Koşullu Beklentiler	23
1.2.2. Kümülatif Talep	26
1.2.3. Marjinal Talep	35
1.2.4. Verilen bir Zaman Periyodunda Sıfır Talep Gözlenme Olasılığı	36
1.2.5. Simülasyon Sonuçları – Marjinal Talep	41
1.3. Marjinal Talep İçin Dağılımın Belirlenmesi	46
1.3.1. Artan Sermaye Mali Sayısı İçin Marjinal Talep Dağılımının Belirlenmesi	47
1.3.2. Azalan Sermaye Mali Sayısı İçin Marjinal Talep Dağılımının Belirlenmesi.....	52
2. Talebin Durağan Olduğu Durumda Bakım Sağlayıcı Firmaların Optimum Satın Alma Politikasının Araştırılması.....	56
2.1. Orijinal Tedarikçinin Termin Süresi 1 Periyot Olduğunda Optimum Kontrol Politikası.....	58
2.2. Orijinal Tedarikçinin Termin Süresi Genel Bir Tamsayı Olduğunda Optimum Kontrol Politikası.....	61
2.3. Envanter Kontrol için Sezgisel Yaklaşımların Değerlendirilmesi.....	62
3. Yaşam Döngüsünün Büyüme ve Azalış Aşamalarında Satın Alma Politikalarının Araştırılması	65
3.1. Kurulu Sistemlerin Büyüme ve Azalış Dönemlerindeki Durağan Olmayan Talep İçin Optimum Satın Alma Politikasının Araştırılması.....	65
3.1.1. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Arttığı Ürünler için Satın Alma Politikasının Araştırılması	69
3.1.2. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Azaldığı Ürünler için Satın Alma Politikasının Araştırılması.....	73

3.2. Kurulu Sistemin Büyüme ve Azalış Dönemlerinde Ürünler Sayısı ve İkincil Marketler Arasındaki İlişkinin Araştırılması	75
3.2.1. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Arttığı Ürünler için İkincil Marketlerdeki Parça Sayısı	76
3.2.2. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Azaldığı Ürünler için İkincil Marketlerdeki Parça Sayısı	78
3.3. Durağan Olmayan Talep için İkili Tedarik Sistemlerinde Uygulanabilir Politikaların Kullanılması ile Orta Dönemli Planlamanın Yapılması	80
4. Proje Önerisinde Yer Almayıp Ek Olarak Gerçekleştirilen Araştırmalar	84
4.1. Azalan Kurulu Sistemlerdeki Sermaye Mallarının Ömürlerinin Uzatılmasına Yönelik Optimum Yatırım Politikasının Analiz Edilmesi	85
4.2. Bağımsız Karar Vericilerle Azalan Kurulu Sistemler için Talep Dağılımının Türetilmesi ..	89
5. SONUÇ.....	90
REFERANSLAR	92

Tabloların Listesi

Tablo 1: Artan Kurulu Sistemler için Farklı Dağılım Seçim Stratejilerinin Farklı Δt Değerleri için Performansı	52
Tablo 2: Azalan Kurulu Sistemler için Farklı Dağılım Seçim Stratejilerinin Farklı Δt Değerleri için Performansı	56
Tablo 3: Durağan Dağılım için Sayısal Deneylede Kullanılan Problem Parametreleri.....	62
Tablo 4: $\lambda = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları – Durağan Dağılım	63
Tablo 5: $\lambda = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları – Durağan Dağılım	64
Tablo 6: Sezgisel Politikaların Optimum Politikadan Sapmaları.....	65
Tablo 7: Artan Kurulu Sistemler için Sayısal Deneylede Kullanılan Problem Parametreleri.....	70
Tablo 8: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler	71
Tablo 9: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler	71
Tablo 10: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler.....	71
Tablo 11: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler.....	72
Tablo 12: Azalan Kurulu Sistemler için Sayısal Deneylede Kullanılan Problem Parametreleri..	73
Tablo 13: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler.....	74
Tablo 14: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler.....	74
Tablo 15: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler.....	74
Tablo 16: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler.....	75
Tablo 17: Artan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiseli Uygulanan Problem Parametreleri	82
Tablo 18: Azalan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiseli Uygulanan Problem Parametreleri	83
Tablo 19: Artan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiselinin Optimum Politikadan Sapmaları	83

Tablo 20: Azalan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiselinin Optimum Politikadan Sapmaları	84
---	----

Figürlerin Listesi

Şekil 1: Artan Kurulu Sistemler (Sermaye Malları) İçin Yedek Parça Talebi (Jin ve Liao, 2008) .	2
Şekil 2: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Birinci Momenti - Verilen α İçin	10
Şekil 3: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Birinci Momenti - Verilen λ İçin.....	10
Şekil 4: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin İkinci Momenti - Verilen α İçin.....	11
Şekil 5: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin İkinci Momenti - Verilen λ İçin	11
Şekil 6: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Üçüncü Momenti - Verilen α İçin	12
Şekil 7: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Üçüncü Momenti - Verilen λ İçin	12
Şekil 8: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen α İçin.....	18
Şekil 9: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen λ İçin.....	18
Şekil 10: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları.....	19
Şekil 11: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen α İçin	20
Şekil 12: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen λ İçin.....	20
Şekil 13: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları.....	21
Şekil 14: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen α İçin	21
Şekil 15: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen λ İçin.....	22
Şekil 16: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları.....	22
Şekil 17: Yaşam Döngüsünün Sonundaki Kurulu Sistemler İçin Yedek Parça Talebi	23
Şekil 18: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen α İçin	41
Şekil 19: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen λ İçin.....	42
Şekil 20: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları.....	42
Şekil 21: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen α İçin.....	43
Şekil 22: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen λ İçin	43
Şekil 23: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları.....	44
Şekil 24: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen α İçin	44
Şekil 25: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen λ İçin	45
Şekil 26: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları.....	45
Şekil 27: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Değişim/Varyasyon Katsayıları	46

Şekil 28: Hipergometrik Kesikli Dağılım Ailesindeki Dağılımların Yerleşimi (Ord, 1967)	47
Şekil 29: Verilen Sermaye Malı Satış Hızı İçin Farklı Bozulmaların Marjinal Talep Dağılımına Etkisi ($\lambda = 0.15$ ve $\alpha \in \{0.05, 0.30, 0.5\}$)	48
Şekil 30: Verilen Bir Bozulma Hızı ve Farklı Sermaye Malı Satış Hızlarının Marjinal Talep Dağılımına Etkisi ($\alpha = 0.1$ ve $\lambda \in \{0.05, 0.30, 0.50\}$).....	49
Şekil 31: Verilen Bir Bozulma Hızı ve Farklı Sermaye Malı Satış Hızlarının Marjinal Talep Dağılımına Etkisi ($\alpha=0.5$ ve $\lambda \in \{0.05,0.30,0.50\}$).....	49
Şekil 32: Farklı α ve λ Değerleri için Dağılım Seçimleri	50
Şekil 33: Dağılım Seçme Stratejilerinin Kabul İstatistikleri	51
Şekil 34: Azalan Kurulu Sistemlerdeki Marjinal Talep Dağılımının Farklı Parametre Değerlerindeki Seyri.....	54
Şekil 35: Farklı Parametre Değerleri için Hipergeometrik Dağılım Ailesinden Yapılan Seçimlerin Yüzdesi	55
Şekil 36: Farklı Parametre Değerleri için Dağılım Seçim Stratejilerinin Performansları	56
Şekil 37: İkincil Marketten Satın Alma Maliyeti Fonksiyonu	57
Şekil 38: Politika Gradyanı Sezgiselinin İkili Endeks Politikası Üzerinde Gösterimi	80
Şekil 39: RDKV'nin Optimum Ömür Uzatma Yatırımı	87

ÖZET

Sermaye malları kesintisiz çalışmak için düzenli bakıma ihtiyaç duymaktadırlar. Bu gereksinimin yüksek kalitede sürdürülebilmesi sermaye malının satışında önemli bir rol oynamaktadır. Sermaye malının üreticisi için ürünlerin satış-sonrası hizmetleri yüksek kar marjları sağlamaktadır. Bununla beraber parçaların üreticisinden bakım noktasına sevkiyatın sorunsuz gerçekleşebilmesi ciddi bir planlama faaliyetini gerektirmektedir. Yedek parça tedarik zincirinin planlanmasında talep dağılımı temel girdi olarak kullanılmaktadır. Talebin durağan bir dağılım gösterdiği dönemlerde planlama görece daha kolayken, talebin durağan olmadığı, sermaye malının ekonomik ömrünün artış ve azalış dönemlerinde, yedek parça tedarik zinciri için gerçekleştirilen planlama aktiviteleri ciddi aksaklıklara maruz kalmaktadır. Bununla beraber, yedek parça tedarik zincirindeki önemli yapılardan bir tanesi de ikincil marketlerdir. İkincil marketler, farklı satıcılar arasında ticaretinin gerçekleştiği çevrimiçi ticari platformlarıdır. Bakımcı firmalar açısından ikincil marketler, parça üreticisine alternatif olarak kullanılabilir bir tedarik kaynağı olarak öne çıkmaktadır.

Bu projede sahada çalışan sermaye malının stokastik olarak artış ve azalış gösterdiği durumlarda yedek parça talebinin dağılımının karakterizasyonu için hipergeometrik dağılım ailesinden uygun dağılım seçen bir algoritma geliştirilmiştir. Simulasyon testleri ile dağılımların yedek parça talebinin modelleme performansları belirlenmiştir. Bu testlerde önerilen algoritmanın uygulamada kabul gören yaklaşıma göre çok daha iyi sonuçlar verdiği bulgulanmıştır. Talep modellemesinden sonra ikincil marketlerin varlığında optimum envanter kontrol politikasının analizine odaklanılmıştır. Burada Markovyan kapasiteye sahip ikincil marketlerin varlığında optimum politika analiz edilmiştir. Optimum politikanın karakterize edilebildiği koşulların belirlerlenmesinden sonra, durağan ve durağan olmayan talep dağılımları için sezgisel metotların adaptasyonu ve performanslarının ölçülmesi gerçekleştirilmiştir.

Son olarak, projede yer almamasına rağmen, projede geliştirilen teorik sonuçların bir uygulaması olarak yaşam döngülerinin sonunda olan ürünlerin ekonomik yaşamlarını uzatmak için yapılacak yatırımların fizibilite analizi ve optimum yatırım politikasının karakterizasyonu gerçekleştirilmiştir.

Bu araştırma projesinde 1 yürütücü (Dr.Öğr.Üy. Mustafa hekimoğlu), 1 araştırmacı (Doç. Dr. Deniz Karlı), 2 yüksek lisans öğrencisi (Ali Kök ve Zülal İşler) çalışmıştır. Elde edilen sonuçlar yayınlanmak üzere prestijli bir akademik dergiye gönderilmiştir.

Anahtar Kelimeler: tedarik zinciri yönetimi, stokastik modelleme, yedek parça envanter kontrol.

ABSTRACT

Capital goods need regular maintenance for uninterrupted operations. This requirement's being continuous and high quality plays an important role in in the sales of capital products. For manufacturers of capital products after-sales services provide high profit margin. In addition, it takes a significant amount of planning to transport spare parts from producers to the point of maintenance. For spare parts planning, demand distribution is the main input. When demand is stable, planning is relatively easier. During growing and declining phases of capital products, when demand distribution is nonstationary, companies experience significant deviations from their plans. Furthermore, another important feature of spare parts supply chains is secondary markets. Secondary markets are the online marketplaces where different brokers trade parts. From the perspective of maintenance providers, secondary markets are part sources alternative to original equipment manufacturers.

In this project, we develop an algorithm selecting a probability distribution from the hypergeometric distribution family for spare parts demand in existence of growing and declining installed bases. These selected distributions are subject to simulation tests to measure their performances. We find that the suggested algorithm performs better than common applications in practice. Afterwards, we analyze optimum inventory control policy in existence of secondary markets with Markovian part availability. After determination of conditions that allow analytic characterization of the optimal policy, we adopt heuristic policies stationary and nonstationary spare parts demand distributions.

Finally, we characterize the optimum lifetime extension investments for products that are at the end of their economic lifetimes as another application of our theoretical results.

In this research project, 1 lead principal investigator (Assist.Prof. Dr. Mustafa Hekimoğlu), 1 principal investigator (Assoc. Prof. Dr. Deniz Karlı), 2 master students (Ali Kök and Zuhâl İşler) worked. The results of this project is submitted to an prestigious academic journal for publication.

Keywords: Supply chain management, stochastic modeling, spare parts inventory control

1. KURULU SİSTEM SAYISINA BAĞLI TALEBİN MODELLENMESİ

Kurulu sistemlerin zaman içinde değişkenlik gösterdiği sistemlerdeki yedek parça talebin (zamana bağımlı olarak) modellenmesi metodolojik zorluklar içermektedir. Değişen kurulu sistem sayısı, üreticiye gelen yedek parça talebinin *dağılımının* zamanla değişmesine sebep olduğu için bu tür sistemlerdeki talebin tahminine dayalı planlama aktiviteleri tahmin sapmalarının büyük olmasından ciddi şekilde etkilenmektedir. Bu nedenle firmalar ciddi zarara uğramakta ve rekabet güçleri zayıflamaktadır. Bununla beraber sapma gösteren tahminler nedeniyle tutmayan planlar ciddi ekonomik kayıplara sebep olmaktadır.

Bu bölümde kurulu sistem sayısının zamana bağımlı olarak arttığı ve azaldığı sistemlerin modellenmesi gerçekleştirilecektir. Her iki senaryo için, kurulu sistemdeki değişiklikler detaylı bir şekilde modellenmiş ve hesaplanan momentler üzerinden uygun bir dağılım seçilmesi gerçekleştirilmiştir. Bu bölümde verilen modeller ve uygulamaları ekte verilen makale ile Operations Research dergisine gönderilmiştir.

Bu bölümde verilen iki modelden artan kurulu sistemlere yönelik olanı (Bölüm 2.1) ilk olarak Jin ve Liao (2008) tarafından önerilmiştir. Ancak bu yazarların çalışmasında ulaştıkları sonuçlara bu bölümde daha temel bir ispat tekniği ile ulaşılmıştır. Bunun yanında Jin ve Liao'nun çalışmasında talep modelinin üçüncü merkezi momenti ve çarpıklık katsayısı (*skewness coefficient*) hesaplanmamıştır. Bu yönüyle bu bölümde ele alınan model artan kurulu sistemlerin olduğu literatüre ciddi katkı sağlamıştır. Bunun yanında Bölüm 2.2'de verilen azalan kurulu sistemlere ait yedek parça talebinin detaylı modellenmesi literatürde daha önce hiç çalışılmamış bir konudur. Projenin bu bölümündeki çalışma yedek parça tedarik zinciri literatürüne ciddi katkı sağlar niteliktedir.

Artan ve azalan kurulu sistemlerin dikkate alındığı durumlar aşağıdaki bölümlerde ayrı ayrı sunulmuştur.

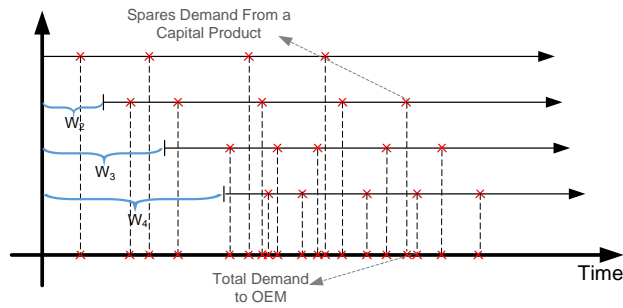
1.1. Artan Kurulu Sistemler İçin Durağan Olmayan Talebin Modellenmesi

Sermaye mallarının verimli kullanılabilmesi için düzenli olarak bakıma tabii tutulması gerekmektedir. Dolayısıyla artan sermaye mali sayısı, artan sayıda birim zamandaki bozulma miktarı ve ürünün üreticisi ve Orjinal Parça Tedarikçisi (OPT) açısından (stokastik olarak) artan

yedek parça talebi anlamına gelmektedir. Yedek parça talebindeki stokastik artış iç içe geçmiş iki stokastik süreçten etkilenmektedir.

1. Rassal olarak gerçekleşen sermaye malı satışları
2. Her bir sermaye malı için rassal olarak gerçekleşen yedek parça talebi

İç içe geçmiş bu iki stokastik süreç Şekil 1’de verilmiştir. Bu proje kapsamında yedek parça talebindeki artış yukarıdaki iki stokastik süreci temsil eden iki homojen Poisson süreci ile modellenmiştir. Öyle ki, birinci stokastik sürecin (sermaye malı satışları) λ parametrelili Poisson sürecini, ikinci sürecin (her bir sermaye malı için rassal bozulmalar sonucu yedek parça talebi) α parametrelili Poisson süreci izlediği varsayılmıştır.



Şekil 1: Artan Kurulu Sistemler (Sermaye Malları) İçin Yedek Parça Talebi (Jin ve Liao, 2008)

İç içe geçmiş bu iki stokastik süreçten ilki, ikinci stokastik süreci başlatarak toplam yedek parça talebini oluşturmaktadır. Poisson sürecinin yapısı gereği $i+1$ -inci sermaye malı için ($i \geq 1$) yedek parça talep süreci W_i rassal gecikmesi ile başlamaktadır ve bu rassal gecikme $Erlang(i, \lambda)$ dağılımını takip etmektedir.

1.1.1 Tanımlar ve Koşullu Beklentiler

Bu ana başlık altında öncelikle kullanılan terimleri ve gösterimleri tanıtacağız. Bu bölümde X_i ile $Üstel(\lambda)$ ve

$$W_j = \sum_{i=1}^j X_i$$

ile Erlang rastlantısal değişkenlerini ifade edeceğiz. N_t ve m_t ile λt ve αt parametrelili iki Poisson değişkenini göstereceğiz. Gösterimi kısaltmak amacıyla ise λt ve αt yerine λ_t ve α_t yazacağız. Öncelikle i 'ninci yeni kurulu sistemin piyasaya $(i-1)$ 'inci sistemden X_i zaman sonra sunulduğunu kabul edeceğiz. Dolayısıyla başlangıçtan bu yeni sistemin piyasaya sürüldüğü ana kadar geçen toplam zamanın W_i oluşunu görüyoruz. i 'ninci kurulu sistemin t zamanına kadar talep ettiği toplam yedek parça sayısı m_t^i olsun. Bu durumda eğer

$$\{\tilde{m}^i(t)\}_{i=1}^{\infty}$$

ailesini bağımsız $Poisson(\lambda t)$ değişkenleri olarak tanımlarsak $m_t^i = \tilde{m}^i(t - W_i) = m(t - W_i)$ ilişkisini elde etmekteyiz.

Bu bölümde bazı integral tanımlamalarını ve bunlara karşılık gelen değerleri sıklıkla kullanacağız. Bu değerleri başlamadan önce kısa bir sonuç olarak listeleyeceğiz. Gösterimleri zor olmadığından detayları atlayacağız. Bu integraller n boyutlu uzaylar üzerinde çalışacaklar. Çalışacakları alt uzayları kısaca $D_t^n = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in R^n: 0 \leq w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n \leq t\}$ olarak gösterelim.

Önerme 1.1.1. $i, j, k, n \in N$ değerleri için $0 < k \leq j \leq i \leq n$ durumunda ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in R^n$ için

$$i. I_i^t = \frac{n!}{t^n} \int_{D_t^n} w_i dw = i \frac{t}{n+1},$$

$$ii. I_{i,j}^t = \frac{n!}{t^n} \int_{D_t^n} w_i w_j dw = j(i+1) \frac{t^2}{(n+1)(n+2)},$$

$$iii. I_{i,j,k}^t = \frac{n!}{t^n} \int_{D_t^n} w_i w_j w_k dw = k(j+1)(i+2) \frac{t^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

değerleri sağlanmaktadır.

Bu bölümde kullanacağımız önemli bir yöntem her bir kurulu sistemin ihtiyaç duyduğu yedek parça talebi üzerine koşullamalar yapmak olacaktır. Bu sebeple $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_n$ durumu için

$$f_{W|N_t}(w|n) = P(W = (W_1, \dots, W_n) \in dw | N_t = n)$$

koşullu yoğunluğunu kullanacağız. Sistemlerin piyasaya arzı bağımsız Poisson dağılımlarını takip ettiğinden bu yoğunluğun sıralama istatistiği olduğu bilinmektedir. Bu durumda

$$f_{W|N_t}(w|n) = \frac{n!}{t^n}$$

olmaktadır. Bunu göz önünde bulundurarak aşağıdaki koşullu beklentileri hesaplayacağız.

Önerme 1.1.2. $i, j, k, n \in N$ değerleri için $0 < k \leq j \leq i \leq n$ durumunda

i.

$$\mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) = \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1}\right),$$

ii.

$$\mathbb{E}(m_t^i m_t^j | N_t = n) = \alpha_t^2 \left(1 - \frac{i+j}{n+1} + \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)}\right),$$

iii.

$$\mathbb{E}(m_t^i m_t^j m_t^k | N_t = n) = \alpha_t^3 \left(1 - \frac{i+j+k}{n+1} - \frac{j(i+1)+k(i+1)+k(j+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right),$$

iv.

$$\mathbb{E}((m_t^i)^2 | N_t = n) = \alpha_t^2 \left(1 - \frac{2i}{n+1} + \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) + \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1} \right),$$

v.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((m_t^i)^3 | N_t = n) &= \alpha_t^3 \left(1 - \frac{3i}{n+1} + \frac{3i(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{i(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\ &\quad + 3\alpha_t^2 \left(1 - \frac{2i}{n+1} + \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) + \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1} \right), \end{aligned}$$

vi.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n) &= \alpha_t^3 \left(1 - \frac{2i+j}{n+1} + \frac{i(i+1)+2j(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{j(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\ &\quad + \alpha_t^2 \left(1 - \frac{i+j}{n+1} + \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right), \end{aligned}$$

vii.

$$\mathbb{E}(m_t^i (m_t^j)^2 | N_t = n) = \alpha_t^3 \left(1 - \frac{2j+i}{n+1} + \frac{j(j+1)+2j(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{j(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

değerleri sağlanır.

Kanıt. (i.) Öncelikle tanımdan dolayı

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) &= \mathbb{E}(\tilde{m}^i(t - W_i) | N_t = n) \\ &= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(m(t - w_i) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw. \end{aligned}$$

$m(t)$ değişkeni αt parametrel bir Poisson değişkeni olduğundan integral içerisindeki beklenti w_i değerinin deterministik bir değişken olduğu $\alpha(t - w_i)$ ifadesine eşit olur. Bu nedenle Önerme 1.1.1'in yardımıyla

$$\mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) = \int_{\mathbf{D}_t^n} \alpha(t - w_i) \frac{n!}{t^n} dw = \alpha(t - I_i) = \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1} \right)$$

eşitliğini elde ederiz.

(ii.) \tilde{m}^i ve \tilde{m}^j değişkenlerinin bağımsızlığından dolayı aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(m_t^i m_t^j | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(\tilde{m}^i(t - w_i) \tilde{m}^j(t - w_j) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(\tilde{m}^i(t - w_i) | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(\tilde{m}^j(t - w_j) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(m(t - w_i) | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(m(t - w_j) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \alpha(t - w_i) \alpha(t - w_j) \frac{n!}{t^n} dw = \alpha^2 (t^2 - t(I_i + I_j) + I_{i,j}) \\
&= \alpha_t^2 \left(1 - \frac{i + j}{n + 1} + \frac{j(i + 1)}{(n + 1)(n + 2)} \right).
\end{aligned}$$

(iii.) Yine (ii.)'deki yaklaşıma paralel olarak \tilde{m}^i ve \tilde{m}^j değişkenlerinin bağımsızlığını kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(m_t^i m_t^j m_t^k | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(m(t - w_i) | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(m(t - w_j) | W = w, N_t = n) \cdot \\
&\quad \mathbb{E}(m(t - w_k) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} [\alpha(t - w_i) \alpha(t - w_j) \alpha(t - w_k)] \frac{n!}{t^n} dw \\
&= \alpha^3 (t^3 - t^2(I_i + I_j + I_k) + t(I_{i,j} + I_{i,k} + I_{j,k}) - I_{i,j,k}) \\
&= \alpha_t^3 \left(1 - \frac{i + j + k}{n + 1} - \frac{j(i + 1) + k(i + 1) + k(j + 1)}{(n + 1)(n + 2)} - \frac{k(j + 1)(i + 2)}{(n + 1)(n + 2)(n + 3)} \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(iv.) Poisson değişkeninin ikinci momenti aracılığıyla aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((m_t^i)^2 | N_t = n) &= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(m^2(t - w_i) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} [\alpha^2(t - w_i)^2 + \alpha(t - w_i)] \frac{n!}{t^n} dw \\
&= \alpha^2 (t^2 - 2tI_i + I_{i,i}) + \alpha (t - I_i) \\
&= \alpha_t^2 \left(1 - \frac{2i}{n + 1} + \frac{i(i + 1)}{(n + 1)(n + 2)} \right) + \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n + 1} \right)
\end{aligned}$$

(v.) Poisson değişkeninin üçüncü momenti aracılığıyla aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((m_t^i)^3 | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(m^3(t - w_i) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} [\alpha^3(t - w_i)^3 + 3\alpha^2(t - w_i)^2 + \alpha(t - w_i)] \frac{n!}{t^n} dw \\
&= \alpha^3 (t^3 - 3t^2 I_i + 3t I_{i,i} - I_{i,i,i}) + 3\alpha^2 (t^2 - 2t I_i + I_{i,i}) + \alpha (t - I_i) \\
&= \alpha_t^3 \left(1 - \frac{3i}{n+1} + \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{i(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
&\quad + 3\alpha_t^2 \left(1 - \frac{2i}{n+1} + \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) + \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1} \right).
\end{aligned}$$

(vi.) \tilde{m}^i ve \tilde{m}^j değişkenlerinin bağımsızlığından dolayı aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(m^2(t - w_i) | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(m(t - w_j) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} [\alpha^2(t - w_i)^2 + \alpha(t - w_i)] \alpha(t - w_j) \frac{n!}{t^n} dw \\
&= \alpha^3 (t^3 - t^2(2I_i + I_j) + t(2I_{i,j} + I_{i,i}) + I_{i,j} - I_{i,i,j}) + \alpha^2 (t^2 - t(I_i + I_j) + I_{i,j}) \\
&= \alpha_t^3 \left(1 - \frac{2i+j}{n+1} + \frac{2j(i+1) + i(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{j(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
&\quad + \alpha_t^2 \left(1 - \frac{i+j}{n+1} + \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right).
\end{aligned}$$

(vii.) Bu önerme simetri özelliği kullanılarak (v.) numaralı önerme ile aynı şekilde gösterilir.

1.1.2. Kümülatif Talep

Bu bölümde S_t ile piyasadaki tüm kurulu sistemlerin t anına kadar ortaya koyduğu kümülatif talebi göstereceğiz. Bu durumda

$$S_t = \sum_{i=0}^{N_t} m_t^i$$

olarak ifade edebiliriz. Burada N_t piyasaya t anına kadar sürülen toplam kurulu sistem sayısını göstermektedir. Birincil hedefimiz bu toplamın momentlerini ortaya çıkartmak ve dağılımı bu

momentler üzerinden tanımlamak olacaktır. Bu amaçla kullanacağımız olasılık ölçüsü ve buna bağlı beklenen değer operatörünü \mathbb{P} ve \mathbb{E} ile göstereceğiz.

Önerme 1.1.3. S_t rastlantısal değişkeninin ilk üç merkezi momenti aşağıda belirtildiği gibidir.

- i. $\mathbb{E}(S_t) = \alpha_t \left(\frac{1}{2} \lambda_t + 1 \right)$.
- ii. $\mathbb{E}(S_t^2) = \alpha_t^2 \left(\frac{1}{4} \lambda_t^2 + \frac{4}{3} \lambda_t + 1 \right) + \alpha_t \left(\frac{1}{2} \lambda_t + 1 \right)$.
- iii. $\mathbb{E}(S_t^3) = \alpha_t^3 \left(\frac{1}{8} \lambda_t^3 + \frac{5}{4} \lambda_t^2 + \frac{11}{4} \lambda_t + 1 \right) + 3\alpha_t^2 \left(\frac{1}{4} \lambda_t^2 + \frac{4}{3} \lambda_t + 1 \right) + \alpha_t \left(\frac{1}{2} \lambda_t + 1 \right)$.

Kanıt. (i.) Öncelikle beklentiyi N_t üzerine koşullayalım.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(S_t | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \end{aligned}$$

Önerme 1.1.2 vasıtasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \alpha_t \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathbb{P}(N_t = n) - \frac{\alpha_t}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \alpha_t \mathbb{E}(N_t + 1) - \frac{\alpha_t}{2} \mathbb{E}(N_t) = \alpha_t \left(\frac{1}{2} \lambda_t + 1 \right). \end{aligned}$$

(ii.) Bu sonucu elde etmek için öncelikle toplamın karesini

$$S_t^2 = \sum_{i=0}^{N_t} (m_t^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N_t} \sum_{j=0}^{i-1} m_t^i m_t^j$$

şeklinde ifade edelim. Şimdi bu karenin beklentisini N_t üzerine koşullayalım.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(S_t^2 | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \mathbb{E}((m_t^i)^2 | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \mathbb{E}(m_t^i m_t^j | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \left[\alpha_t^2 \left(1 - \frac{2i}{n+1} + \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) + \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&\quad + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_t^2 \left(1 - \frac{i+j}{n+1} + \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_t^2 \left(1 + \frac{1}{3}n \right) + \alpha_t \left(1 + \frac{1}{2}n \right) \right] \mathbb{P}(N_t = n) + \frac{1}{4} \alpha_t^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+3) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \alpha_t^2 \mathbb{E} \left(1 + \frac{1}{3}N_t + \frac{1}{4}N_t^2 + \frac{3}{4}N_t \right) + \alpha_t \mathbb{E} \left(1 + \frac{1}{2}N_t \right) \\
&= \alpha_t^2 \left(\frac{1}{4}\lambda_t^2 + \frac{4}{3}\lambda_t + 1 \right) + \alpha_t \left(\frac{1}{2}\lambda_t + 1 \right).
\end{aligned}$$

(ii) S_t toplamının küpü şu şekilde yazılabilir.

$$S_t^3 = \sum_{i=1}^{N_t} (m_t^i)^3 + 3 \sum_{i=0}^{N_t} \sum_{j=0, j \neq i}^{N_t} (m_t^i)^2 m_t^j + 6 \sum_{i=2}^{N_t} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{j-1} m_t^i m_t^j m_t^k.$$

Öncelikle ilk terimi ele alalım. Önerme 1.1.2'ye göre

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N_t} (m_t^i)^3 \mid N_t = n \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\alpha_t^3 \left(1 - \frac{3i}{n+1} + \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{i(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \right. \\
&\quad \left. + 3\alpha_t^2 \left(1 - \frac{2i}{n+1} + \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) + \alpha_t \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right] \\
&= \alpha_t^3 \left(1 + \frac{1}{4}n \right) + 3\alpha_t^2 \left(1 + \frac{1}{3}n \right) + \alpha_t \left(1 + \frac{1}{2}n \right).
\end{aligned}$$

Önerme 1.1.2'yi bu kez ikinci terim için kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{N_t} \sum_{j=0, j \neq i}^{N_t} (m_t^i)^2 m_t^j \middle| N_t = n \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \mathbb{E} \left((m_t^i)^2 m_t^j \middle| N_t = n \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E} \left((m_t^i)^2 m_t^j \middle| N_t = n \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_t^3 \left(1 - \frac{2i+j}{n+1} + \frac{i(i+1) + 2j(i+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{j(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_t^2 \left(1 - \frac{i+j}{n+1} + \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_t^3 \left(1 - \frac{2i+j}{n+1} + \frac{i(i+1) + 2i(j+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{i(i+1)(j+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_t^2 \left(1 - \frac{i+j}{n+1} + \frac{i(j+1)}{(n+1)(n+2)} \right) \\
&= \frac{1}{15} \alpha_t^3 n(n+4) + \frac{1}{8} \alpha_t^2 n(n+3) + \frac{1}{10} \alpha_t^3 n(n+4) + \frac{1}{8} \alpha_t^2 n(n+3) \\
&= \frac{1}{6} \alpha_t^3 n(n+4) + \frac{1}{4} \alpha_t^2 n(n+3).
\end{aligned}$$

Son olarak üçüncü terim

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\sum_{i=2}^{N_t} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{j-1} m_t^i m_t^j m_t^k \middle| N_t = n \right) \\
&= \alpha_t^3 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{j-1} \left(1 - \frac{i+j+k}{n+1} - \frac{j(i+1) + k(i+1) + k(j+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
&= \frac{1}{48} \alpha_t^3 n(n-1)(n+4).
\end{aligned}$$

Şimdi bu üç terimi bir araya getirirsek

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(S_t^3) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{8} \alpha_t^3 (n^3 + 7n^2 + 14n + 8) + \frac{1}{4} \alpha_t^2 (3n^2 + 13n + 12) + \frac{1}{2} \alpha_t (n + 2) \right] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \frac{1}{8} \alpha_t^3 \mathbb{E}(N_t^3 + 7N_t^2 + 14N_t + 8) + \frac{1}{4} \alpha_t^2 \mathbb{E}(3N_t^2 + 13N_t + 12) + \frac{1}{2} \alpha_t \mathbb{E}(N_t + 2) \\
&= \alpha_t^3 \left(\frac{1}{8} \lambda_t^3 + \frac{5}{4} \lambda_t^2 + \frac{11}{4} \lambda_t + 1 \right) + 3\alpha_t^2 \left(\frac{1}{4} \lambda_t^2 + \frac{4}{3} \lambda_t + 1 \right) + \alpha_t \left(\frac{1}{2} \lambda_t + 1 \right),
\end{aligned}$$

olur ki bu da kanıtın tamamlanmasını sağlar. □

Yukarıdaki önermenin doğal bir sonucu olarak kümülatif talebin varyansını elde etmek ve bunu basit bir formda yazmak mümkündür.

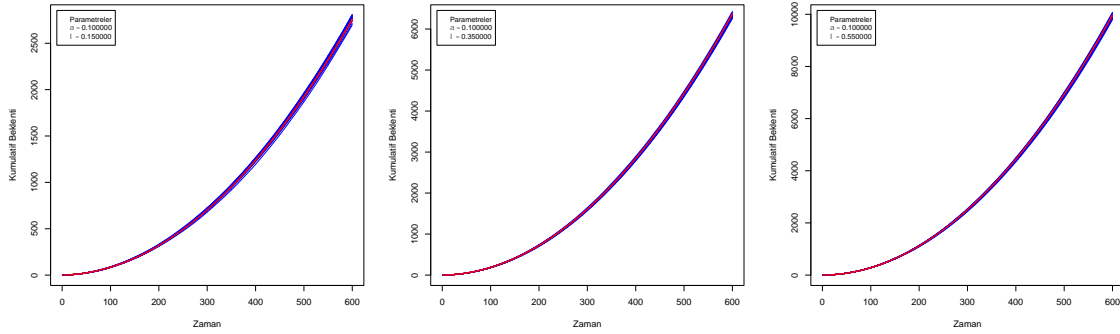
Önerme 1.1.4. $Var(S_t) = \frac{1}{3}\alpha_t^2\lambda_t + \alpha_t(1 + \frac{1}{2}\lambda_t)$.

1.1.3. Simülasyon Sonuçları – Kümülatif Talep

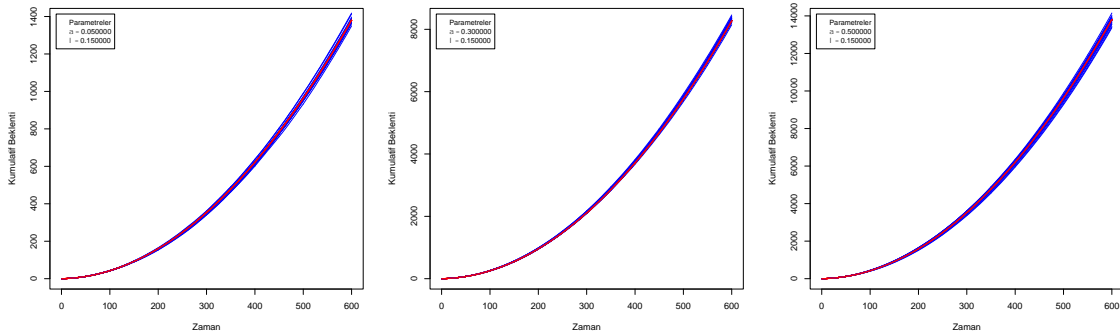
Yukarıda elde edilen momentler, çalışmalar başlamadan önce kurgulanan simülasyonlar üzerinde test edilmiştir. Buna göre kurulu sistemlerin devreye girme parametreleri ve her bir kurulu sistemin (eş) yedek parça isteği üretme parametreleri ele alınarak piyasanın ihtiyaç duyduğu toplam yedek parça talebi sayısal olarak modellenmiş, bu sayısal modeller üzerine elde edilen teorik momentler yerleştirilmiştir. Birkaç farklı parametre ikilisi (α, λ) için elde edilen çalışmalar şu şekildedir.

Birinci Moment

Kümülatif talebin beklenen değeri 6 değişik parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik beklentiye (birinci merkezi momenti), mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.



Şekil 2: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Birinci Momenti - Verilen α İçin

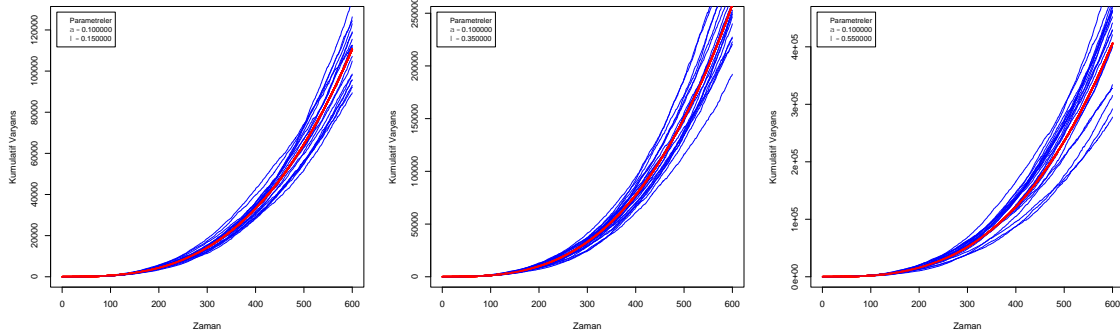


Şekil 3: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Birinci Momenti - Verilen λ İçin

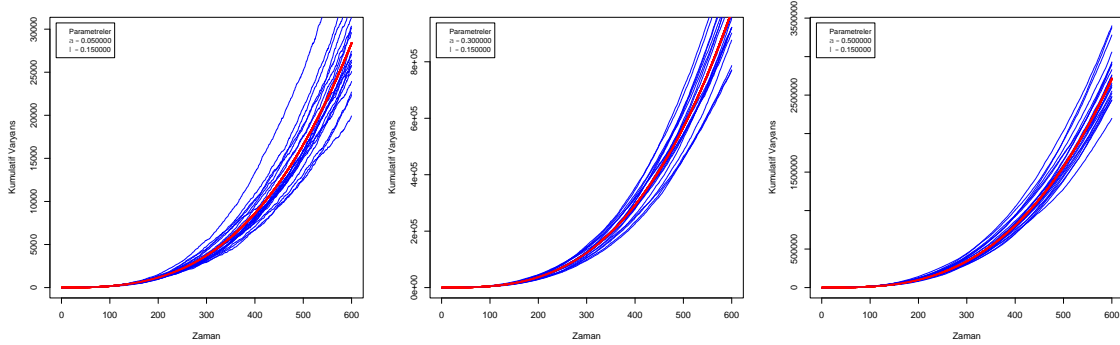
Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir.

İkinci Moment

Kümülatif talebin varyans değeri yine aynı 6 parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik varyansı (ikinci merkezi momenti), mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.



Şekil 4: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin İkinci Momenti - Verilen α İçin



Şekil 5: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin İkinci Momenti - Verilen λ İçin

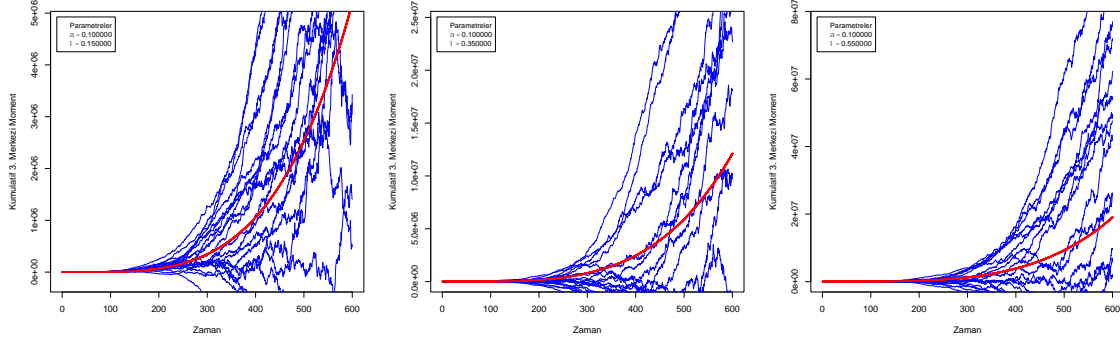
Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir.

Üçüncü Moment

Kümülatif talebin üçüncü merkezi moment değeri yine aynı 6 parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri

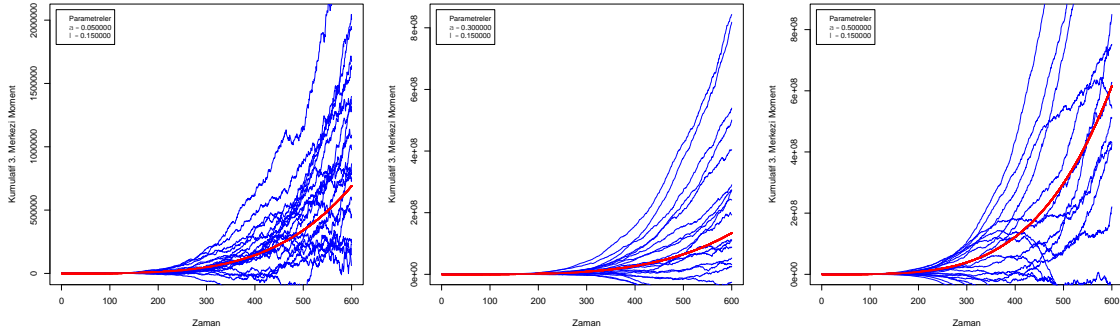
yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik üçüncü merkezi momenti, mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.

α sabitken



Şekil 6: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Üçüncü Momenti - Verilen α İçin

λ sabitken



Şekil 7: Artan Kurulu Sistemler için Kümülatif Talebin Üçüncü Momenti - Verilen λ İçin

Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir. Fakat moment derecesi arttıkça saçılım da giderek artmaktadır.

1.1.4. Marjinal Talep

Yukarıdaki bölümlerde verilen kümülatif talep değerleri S_t toplam talebin matematiksel karakterizasyonu için kritik derecede önemlidir. Diğer yandan, uygulama açısından tartışılması gereken önemli bir başka konu ise marjinal talebin ne olduğudur. Marjinal talebin ne olduğu yedek parça envanter planlaması ve tedarik zinciri yönetim için kritik bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır. Marjinal talebin modellenmesine bu başlık altında cevap bulacağız. Bu amaçla $[t, t + \Delta t]$ zaman aralığında gerçekleşen marjinal talebi stokastik bir süreç olarak $D_{t,\Delta t}$ ile gösterebiliriz. Bu durumda

$$D_{t,\Delta t} = S_{\{t+\Delta t\}} - S_t$$

olur. Bu süreç, temelde 2 parçaya ayrılabilir. Bunlar t anına kadar piyasaya sürülmüş kurulu sistemlerin oluşturduğu talep ve bu aralıkta piyasaya sürülen kurulu sistemlerin oluşturduğu talep olarak ele alınabilir. Bu iki parçaya sırasıyla $K_{\Delta t}^{N_t}$ ve $D_{0,\Delta t}$ diyelim ve

$$D_{t,\Delta t} = K_{\Delta t}^{N_t} + D_{0,\Delta t}$$

olarak yazalım. $K_{\Delta t}^{N_t}$ stokastik süreci N_t adet ve her biri $\lambda_{\Delta t}$ parametrelili bağımsız Poisson süreçlerinin toplamından oluştuğundan, $K_{\Delta t}^{N_t}$ sürecinin kendisi de bir Poisson sürecidir ve şu eşitliği sağlar

$$\mathbb{E}(K_{\Delta t}^{N_t} | N_t = n) = n\alpha_{\Delta t}.$$

Aynı zamanda $D_{0,\Delta t}$ ve $S_{\Delta t}$ süreçleri eş dağılılan süreçlerdir. Bunları kullanarak $D_{t,\Delta t}$ sürecini

$$D_{t,\Delta t} = K_{\Delta t}^{N_t} + S_{\Delta t}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ilişkinin ışığında marjinal talebin ilk 3 momentini şu şekildedir.

Önerme 1.1.5.

- i. $\mathbb{E}(D_{t,\Delta t}) = \alpha_{\Delta t} (\lambda_t + \frac{1}{2}\lambda_{\Delta t} + 1)$.
- ii. $\mathbb{E}((D_{t,\Delta t})^2) = \alpha_{\Delta t}^2 (\lambda_t^2 + \lambda_t) + \alpha_{\Delta t} \lambda_t + 2\alpha_{\Delta t} \lambda_t \mathbb{E}(S_{\Delta t}) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2)$
- iii. $\mathbb{E}((D_{t,\Delta t})^3) = \alpha_{\Delta t}^3 (\lambda_t^3 + 3\lambda_t^2 + \lambda_t) + 3\alpha_{\Delta t}^2 (\lambda_t^2 + \lambda_t) + \alpha_{\Delta t} \lambda_t + 3(\alpha_{\Delta t}^2 (\lambda_t^2 + \lambda_t) + \alpha_{\Delta t} \lambda_t) \mathbb{E}(S_{\Delta t}) + 3\alpha_{\Delta t} \lambda_t \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^3)$.

Kanıt. Önerme 1.1.3'te olduğu gibi N_t üzerine koşullama yapacağız. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_{t,\Delta t}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(D_{t,\Delta t} | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}(K_{\Delta t}^n | N_t = n) + \mathbb{E}(S_{\Delta t})] \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(N_t) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}) \\ &= \alpha_{\Delta t} \lambda_t + \alpha_{\Delta t} \left(\frac{1}{2} \lambda_{\Delta t} + 1 \right). \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_{t,\Delta t}^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(D_{t,\Delta t}^2 | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}((K_{\Delta t}^n)^2 | N_t = n) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) + 2\mathbb{E}(S_{\Delta t}) \mathbb{E}(K_{\Delta t}^n | N_t = n)] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [n^2 \alpha_{\Delta t}^2 + n \alpha_{\Delta t} + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) + 2n \alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(S_{\Delta t})] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \alpha_{\Delta t}^2 \mathbb{E}(N_t^2) + \alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(N_t) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) + 2\alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(N_t) \mathbb{E}(S_{\Delta t}) \\
&= \alpha_{\Delta t}^2 (\lambda_t^2 + \lambda_t) + \alpha_{\Delta t} \lambda_t + 2\alpha_{\Delta t} \lambda_t \mathbb{E}(S_{\Delta t}) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2).
\end{aligned}$$

Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_{t,\Delta t}^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(D_{t,\Delta t}^3 | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{E}((K_{\Delta t}^n)^3 | N_t = n) + 3\mathbb{E}(S_{\Delta t}) \mathbb{E}((K_{\Delta t}^n)^2 | N_t = n) \\
&\quad + 3\mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) \mathbb{E}(K_{\Delta t}^n | N_t = n) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^3)] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n^3 \alpha_{\Delta t}^3 + 3n^2 \alpha_{\Delta t}^2 + n \alpha_{\Delta t}) + 3(n^2 \alpha_{\Delta t}^2 + n \alpha_{\Delta t}) \mathbb{E}(S_{\Delta t}) \\
&\quad + 3n \alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^3)] \mathbb{P}(N_t = n) \\
&= \alpha_{\Delta t}^3 \mathbb{E}(N_t^3) + 3\alpha_{\Delta t}^2 \mathbb{E}(N_t^2) + \alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(N_t) + 3\alpha_{\Delta t}^2 \mathbb{E}(N_t^2) \mathbb{E}(S_{\Delta t}) \\
&\quad + 3\alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(N_t) \mathbb{E}(S_{\Delta t}) + 3\alpha_{\Delta t} \mathbb{E}(S_{\Delta t}^2) \mathbb{E}(N_t) + \mathbb{E}(S_{\Delta t}^3),
\end{aligned}$$

ki eğer

$$\mathbb{E}(N_t) = \lambda_t, \mathbb{E}(N_t^2) = \lambda_t^2 + \lambda_t$$

ve

$$\mathbb{E}(N_t^3) = \lambda_t^3 + 3\lambda_t^2 + \lambda_t$$

eşitliklerini kullanırsak bu bize arzulanan sonucu verir. \square

Bu durumda merkezi momentleri yazmak yukarıdaki önerme sayesinde mümkündür.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_{t,\Delta t} - \mu_{D_{t,\Delta t}})^2 &= \mathbb{E}(D_{t,\Delta t}^2) - \mathbb{E}^2(D_{t,\Delta t}) \\
\mathbb{E}(D_{t,\Delta t} - \mu_{D_{t,\Delta t}})^3 &= \mathbb{E}(D_{t,\Delta t}^3) - 3\mathbb{E}(D_{t,\Delta t}) \mathbb{E}(D_{t,\Delta t}^2) + 2\mathbb{E}^3(D_{t,\Delta t})
\end{aligned}$$

1.1.5. Verilen Bir Zaman Periyodunda Sıfır Talep Gözlenme Olasılığı

Büyüyen kurulu sistemin yedek parça talebinin evrimine ilişkin fikir veren bir diğer önemli özellik, $P_{t,\Delta t}^0$ ile gösterilen, Δt zaman diliminde sıfır talebe sahip olma olasılığıdır. Bu özellik durağan olmayan kurulu sistemler için periyodik yedek parça talebinin dağılımının şeklini gösterir. Ayrıca, (Tripathi vd, 1994) hiper-geometrik dağılım ailesinden beta-binom dağılımının parametrelerini tahmin etmek için $P_{t,\Delta t}^0$ 'yi kullanır. Analitik formülasyonu Bölüm 1.3'deki dağılım seçme algoritmasında da kullanılan aşağıdaki sonuçla elde edilmiştir.

Önerme 1.1.6. Toplam talep miktarının $t \geq 0$ ve $\Delta t \geq 0$ için $S_t = \sum_{i=0}^{N_t} m_t^i$ olduğu varsayalım. Öyleyse, bir $[t, t + \Delta t]$ zaman aralığında talebin oluşmama olasılığı

$$P_0 = e^{-\alpha\Delta t - \lambda\Delta t - \lambda_t(1-e^{-\alpha\Delta t}) + \frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha\Delta t})}$$

ile ifade edilir.

Kanıt. P_0 olasılığını aşağıdaki gibi koşullayabiliriz

$$P_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(S_{t+\Delta t} - S_t = 0 | N_{t+\Delta t} = k, N_t = n) \mathbb{P}(N_{t+\Delta t} = k | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n),$$

ve bunu da I_1 ve I_2 'nin toplamları halinde yazabiliriz, öyle ki

$$I_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^n m_{t+\Delta t}^i - m_t^i = 0 \mid N_{t+\Delta t} = N_t = n\right) \mathbb{P}(N_{\Delta t} = 0) \mathbb{P}(N_t = 0)$$

ve

$$I_2 := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^n m_{t+\Delta t}^i - m_t^i = 0 \mid N_{t+\Delta t} = k, N_t = n\right) \mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^k m_{t+\Delta t}^i = 0 \mid N_{t+\Delta t} = k, N_t = n\right) \mathbb{P}(N_{\Delta t} = k - n) \mathbb{P}(N_t = n)$$

olsun. İlk terim I_1 'in olasılığı m^i rassal değişkenlerinin bağımsız olması özelliğini kullanarak olasılıkların çarpımı olarak hesaplanabilir. Öyle ki

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^n \mathbb{P}(m_{t+\Delta t}^i - m_t^i = 0) \right) \mathbb{P}(N_{\Delta t} = 0) \mathbb{P}(N_t = 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\alpha \Delta t} \right)^{n+1} e^{-\lambda \Delta t} e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\alpha \Delta t - \lambda \Delta t - \lambda t (1 - e^{-\alpha \Delta t})}.
\end{aligned}$$

İkinci terim için öncelikle aşağıdaki olasılık dikkate alınmıştır

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^k m_{t+\Delta t}^i = 0 \mid N_{t+\Delta t} = k, N_t = n\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k-n} m_{\Delta t}^i = 0 \mid N_{\Delta t} = k - n, N_0 = 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k-n} m^i(\Delta t - W_i) = 0 \mid N_{\Delta t} = k - n, N_0 = 0\right) \\
&= \int_{D_{\Delta t}} \left(\prod_{i=1}^{k-n} \mathbb{P}(m(\Delta t - w_i) = 0) \right) f_{W|N_{\Delta t}}(w|k-n) dw \\
&= \int_{D_{\Delta t}} \left(\prod_{i=1}^{k-n} e^{-\alpha \Delta t + \alpha w_i} \right) f_{W|N_{\Delta t}}(w|k-n) dw \\
&= \int_{D_{\Delta t}} e^{-\alpha \Delta t (k-n)} e^{\alpha \sum_{i=1}^{k-n} w_i} f_{W|N_{\Delta t}}(w|k-n) dw.
\end{aligned}$$

Hatırlatmak gerekirse dağılımın sıralı istatistik olmasından dolayı olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{W|N_{\Delta t}}(w|k-n) = \frac{(k-n)!}{\Delta t^{k-n}} \quad (1.5)$$

şeklinde yazılabilir. Dahası, aşağıdaki integrali göstermek zor değildir

$$\int_{D_{\Delta t}} e^{\alpha \sum_{i=1}^{k-n} w_i} dw = \frac{(e^{\alpha \Delta t} - 1)^{k-n}}{(k-n)! \alpha^{k-n}}. \quad (1.6)$$

Bu sonucu yukarıda elde ettiğimiz sonuçta yerine koyarsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^k m_{t+\Delta t}^i = 0 \mid N_{t+\Delta t} = k, N_t = n\right) = \left(\frac{1 - e^{-\alpha \Delta t}}{\alpha \Delta t}\right)^{k-n}. \quad (1.7)$$

Ayrıca I_1 teriminin hesaplamasında ele alınan aynı sebepten ötürü aşağıdaki olasılık yazılabilir

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^n m_{t+\Delta t}^i - m_t^i = 0 \mid N_{t+\Delta t} = k, N_t = n\right) = \left(e^{-\alpha\Delta t}\right)^{n+1}. \quad (1.8)$$

Daha sonra, eşitlik (1.7) ve eşitlik (1.8)'i kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(e^{-\alpha\Delta t}\right)^{n+1} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha\Delta t}\right)^{k-n} \mathbb{P}(N_{\Delta t} = k - n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\alpha\Delta t}\right)^{n+1} \mathbb{P}(N_t = n) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha\Delta t}\right)^k \mathbb{P}(N_{\Delta t} = k) \\ &= e^{-\alpha\Delta t - \lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t e^{-\alpha\Delta t})^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\alpha\Delta t})^k}{\alpha^k (\Delta t)^k} e^{-\lambda\Delta t} \frac{\lambda^k (\Delta t)^k}{k!} \\ &= e^{-\alpha\Delta t - \lambda t + \lambda t e^{-\alpha\Delta t}} e^{-\lambda\Delta t} \left(e^{(\lambda/\alpha)(1 - e^{-\alpha\Delta t})} - 1\right) \\ &= e^{-\alpha\Delta t - \lambda\Delta t - \lambda t(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \left(e^{(\lambda/\alpha)(1 - e^{-\alpha\Delta t})} - 1\right). \end{aligned}$$

Sonuç olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir ve kanıt tamamlanmış olur

$$P_0 = I_1 + I_2 = \exp\left(-\alpha\Delta t - \lambda\Delta t - \lambda t(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + \frac{\lambda}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\Delta t})\right).$$

□

Önerme 1.1.6, sıfır talep olasılığının temel olarak yeni ürünlerin kurulum hızından (λ_t) etkilendiğini ve kullanımda olan sermaye mallarının artan popülasyonundan dolayı üstel olarak azaldığını gösterir.

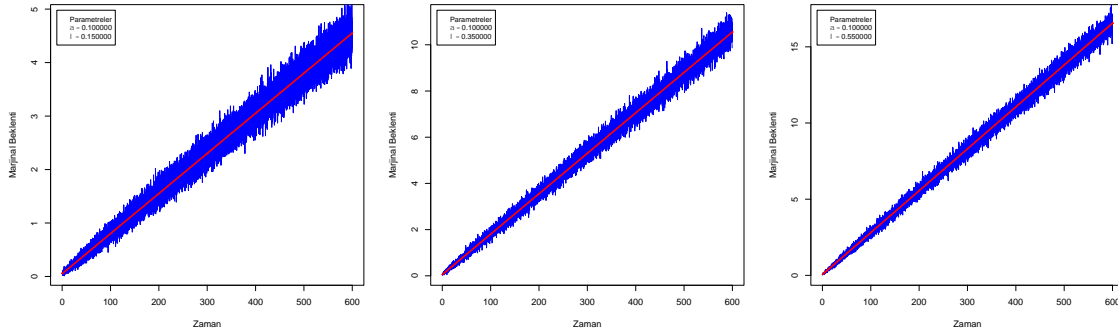
1.1.6. Simülasyon Sonuçları – Marjinal Talep

Yukarıda elde edilen momentler çalışmaları başlamadan önce kurgulanan simülasyonlar üzerinde test edilmiştir. Buna göre kurulu sistemlerin anlık yedek parça talepleri belirtilen parametre ikilileri ile test edilmiş ve oluşturulan simülasyonlarla karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçlarının tümü grafiksel olarak ifade edilmelerinin yanında doğrulukları t testleri sınanmıştır. Tüm t-testlerinde hesaplanan sonuçlar (p -value) 0.05 değerinin altında bulunmuştur. Aşağıda bu sonuçların detaylı tartışması sunulmuştur.

Birinci Moment

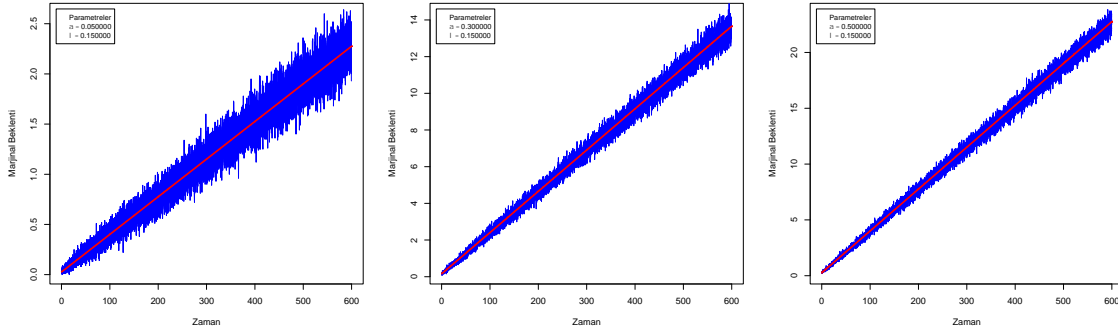
Marjinal talebin beklenen değeri 6 değişik parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik beklentiye (birinci merkezi momenti), mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.

α sabitken



Şekil 8: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen α İçin

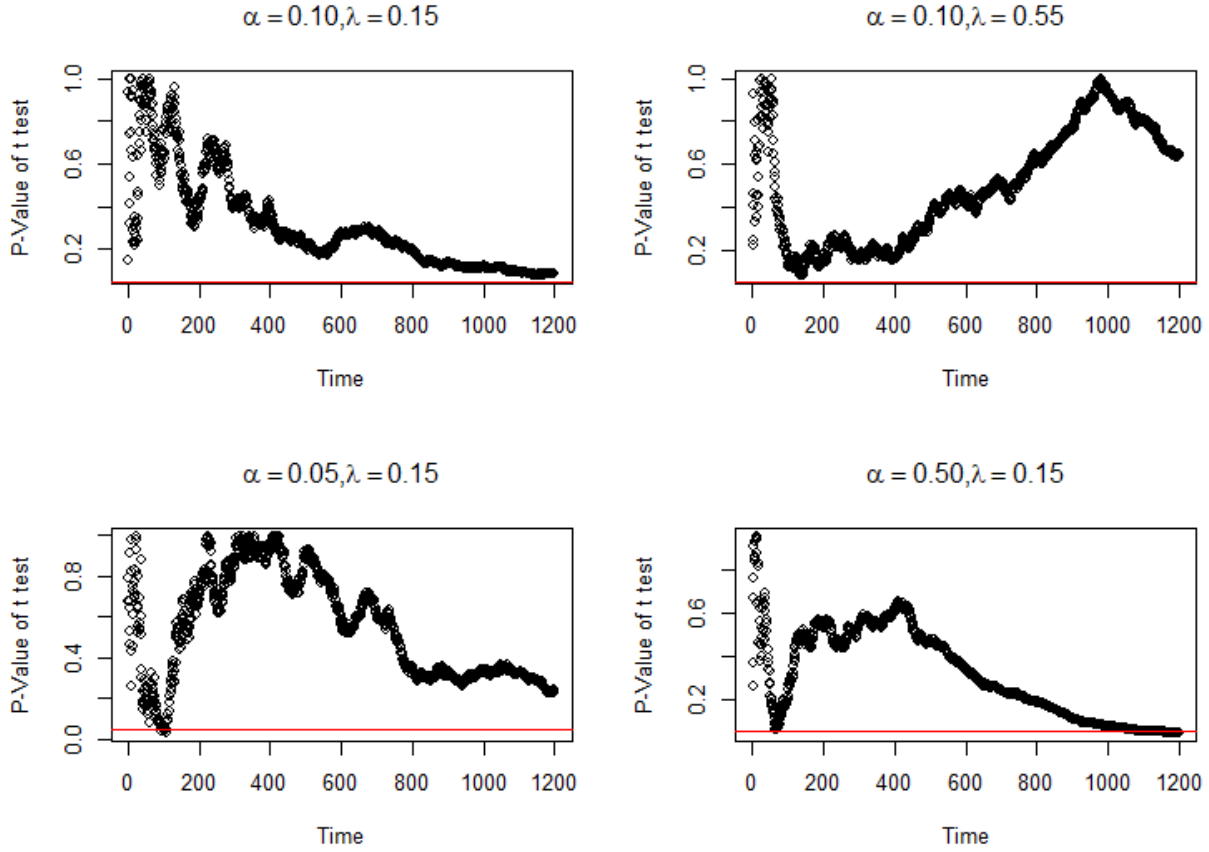
λ sabitken



Şekil 9: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen λ İçin

Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir. Simulasyondan elde edilen talebin birinci momentler, teorik birinci moment ile her bir zaman noktası için test edilmiştir. Birinci momente uygulanan t-testlerinden elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmiştir. Bu şekilde her bir t değeri için ($t = z\Delta t$, $z \in \{z \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq z \leq \frac{600}{\Delta t}\}$) uygulanan t-testlerinden elde edilen p-değerleri, 4 farklı parametre kombinasyonu için ($\alpha \in \{0.10, 0.05\}$, $\lambda \in \{0.15, 0.55\}$) zamana karşı plotlanmıştır. Görüldüğü gibi

birkaç istisna hariç tüm testlerde elde edilen p değeri 0.05 değerinin üzerinde çıkmıştır.

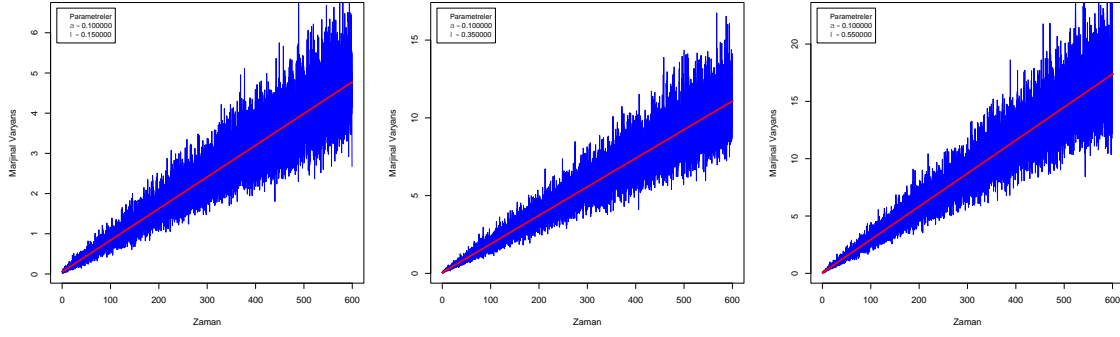


Şekil 10: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları

İkinci Moment

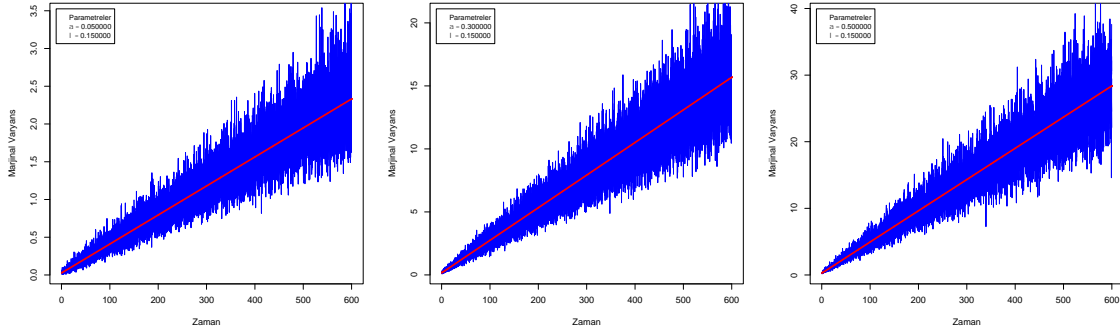
Marjinal talebin varyans değeri yine aynı 6 parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik varyansı (ikinci merkezi momenti), mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.

α sabitken



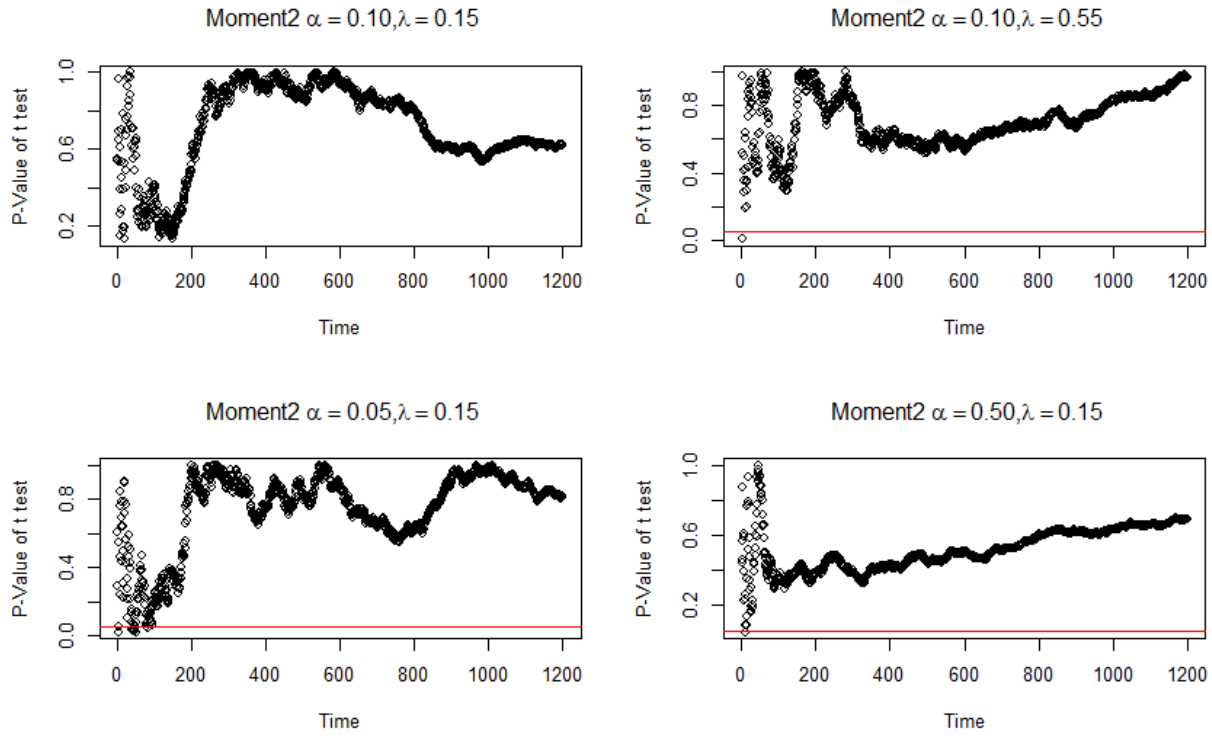
Şekil 11: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen α İçin

λ sabitken



Şekil 12: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen λ İçin

Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir. Bu örtüşmeyi istatistiksel olarak test etmek için 100 replikasyonlu bir simülasyondan elde edilen değerler yukarıda verilen ikinci moment formülasyonu kullanılarak t -testine tabii tutulmuştur. Her bir $n\Delta t$ anı için elde edilen p -değerleri, 4 farklı parametre kombinasyonu için, aşağıda verilen şekilde gösterilmiştir. Bu şekilden de görüldüğü gibi hesaplanan ikinci momentler ile simülasyon değerleri arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır.

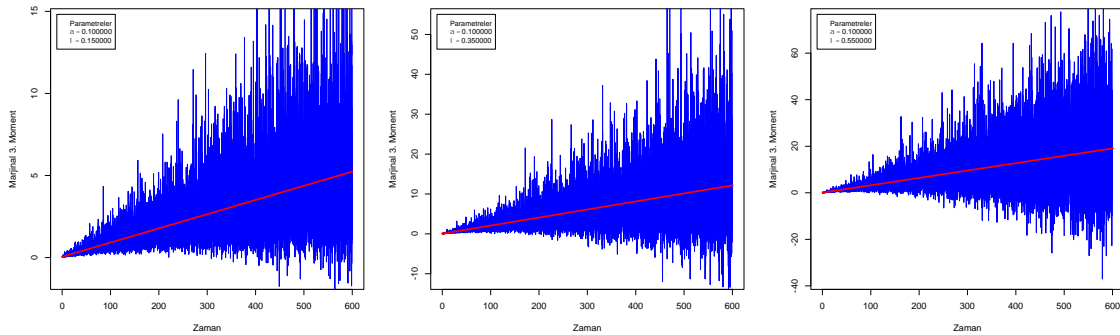


Şekil 13: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları

Üçüncü Moment

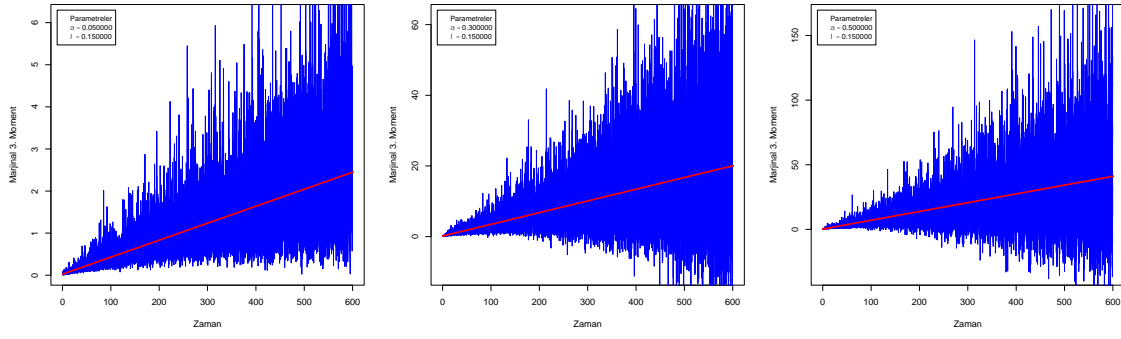
Marjinal talebin üçüncü merkezi moment değeri yine aynı 6 parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik üçüncü merkezi momenti, mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.

α sabitken



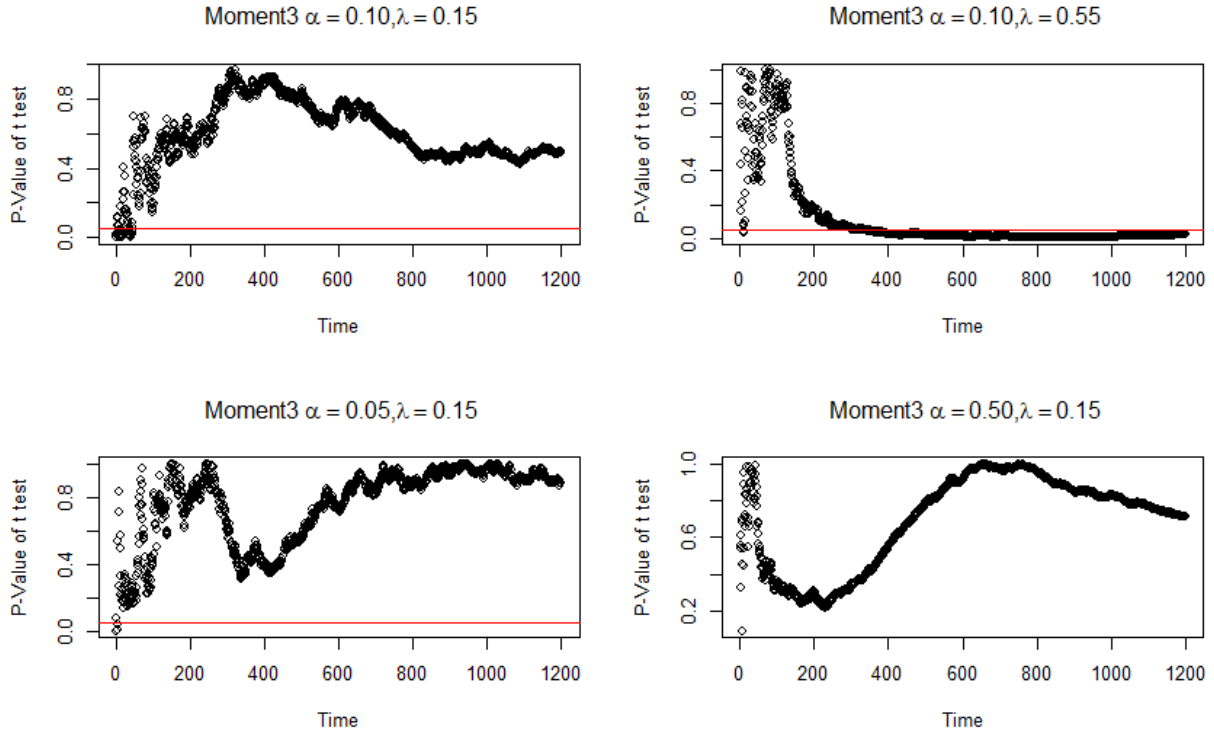
Şekil 14: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen α İçin

λ sabitken



Şekil 15: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen λ İçin

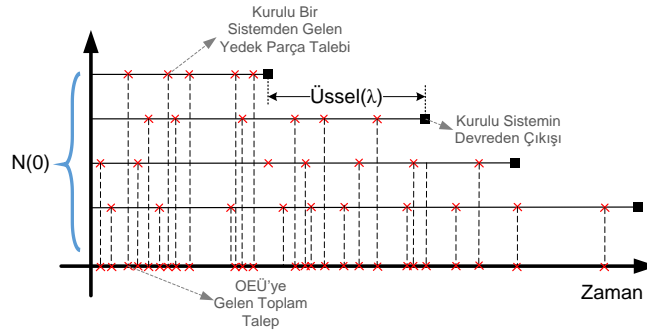
Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir. Fakat moment derecesi arttıkça saçılım da giderek artmaktadır. Elde edilen simülasyon sonuçları ile yukarıda verilen formülasyonun test edilmesi için kümülatif üçüncü moment her bir zaman noktasında istatistiksel teste tabii tutulmuştur. Bu testlerde bir kaç nadir durum dışında hesaplanan momentlerin simülasyon değerlerinden farklı olmadığı görülmüştür.



Şekil 16: Artan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları

1.2. Azalan Kurulu Sistemler

Sermaye mallarının yaşam döngülerinin sonunda yeni sermaye malının devreye alınması bitmiştir ve mevcut sermaye malları zamanla devreden çıkmaktadır (Cohen v.d., 2006). Yaşam döngüsünün bu aşamasında ilk devreye alınan sermaye malları zamanla devreden çıkarılmaktadır ve sahada çalışan toplam sermaye malı sayısı stokastik olarak azalmaktadır. Sermaye malının devreden çıkartılışı (ölmesi) stokastik bir süreç takip etmektedir. Önceki faza paralel olarak devreden çıkmamış her sermaye malı yedek parça talebi oluşturmaktadır. Dolayısıyla dikkate alınan dönemin başında toplam yedek parça talebi $Poisson(N(0)\lambda)$ dağılımı takip etmektedir. Zamanla gerçekleşen devreden çıkışlar nedeniyle toplam yedek parça talebi stokastik olarak azalan rassal bir süreç izlemektedir. Yedek parça talebindeki stokastik azalma Şekil 17’de gösterilmiştir.



Şekil 17: Yaşam Döngüsünün Sonundaki Kurulu Sistemler İçin Yedek Parça Talebi

Yukarıda anlatılan stokastik sürecin başında sabit bir sermaye malı sayısı, $N(0)$, için sermaye malının devreden çıkışları λ parametrelili Poisson süreci, her bir sermaye malı için yedek parça talebi α parametrelili Poisson süreci takip etmektedir. Poisson sürecinin yapısı gereği iki sermaye malının devreden çıkışları arasındaki zaman $\text{Üssel}(\lambda)$ dağılımı takip etmekte, i -ninci sermaye malının devreden çıkışı ise $\text{Erlang}(i, \lambda)$ zaman sonra gerçekleşmektedir.

1.2.1. Tanımlar ve Koşullu Beklentiler

Bu başlık altında piyasada belirli bir sayıda kurulu sistemin bulunduğu ve bu sistemlerin zamanla devre dışı kaldıkları durumu inceleyeceğiz. Bu doğrultuda başlangıçta piyasada N_0 adet kurulu sistemin bulunduğunu varsayalım. Bu kurulu sistemler rastlantısal zamanlarda devre dışı kalmaktadır. Bu rastlantısallığın Poisson dağılımını takip ettiğini kabul edelim. Bu kurulu sistemleri devre dışı kalma zamanlarına göre sıralayalım. Bu durumda iki ardışık zamanda devre dışı kalan kurulu sistemin devre dışı kalma zamanları arası üstel bir dağılıma göre belirlenecektir. Bu senaryoda devre dışı kalan i 'ninci kurulu sistemin ilk andan ne kadar zaman sonra devre dışı kaldığını W_i değişkeniyle belirtelim. Görülüyor ki W_i değişkeni i adet eşlenik ve bağımsız üstel

değişkenin toplamından oluşmaktadır. Bu eş üstel değişkenlerin parametreleri t uzunluğundaki bir zaman aralığında $\lambda_t = \lambda t$ olsun. Artan kurulu sistemlerde olduğu gibi her bir kurulu sistemin Poisson dağılımıyla yedek parça talebi ürettiğini kabul edelim. Bu durumda m_t^i ile i 'nci kurulu sistemin yedek parça talebi olan $\alpha_t = \alpha t$ parametrelili Poisson değişkenini ifade edelim. Piyasadaki kurulu sistem sayısı sınırlı olduğundan (N_0) bu fazda bazı "yalancı kurulu sistemler" oluşturacağız. Bu yalancı kurulu sistemler hiçbir zaman yedek parça talebi üretmeyecek fakat bizim piyasada sonsuz kurulu sistem varmış gibi çalışmamıza olanak sağlayacaktır. Bu amaçla $i = 1, 2, \dots$ değerleri için $\tilde{m}^i(t)$ ve $m^i(t)$ gibi bağımsız ve eş $Poisson(\alpha_t)$ rastlantısal değişkenleri tanımlayıp bunlara bağlı aşağıdaki değişkenleri oluşturacağız.

$$m_t^i = \begin{cases} \tilde{m}^i(\tilde{W}_i \wedge t) & , i = 1, 2, \dots, N_0, \\ 0 & , i > N_0. \end{cases}$$

Bu bölümde elde edeceğimiz sonuçlar bir $Poisson(\lambda_t)$ değişkenin kümülatif dağılım fonksiyonu cinsinden ifade edilecektir. Gösterimi bir miktar sadeleştirmek amacıyla bu fonksiyonu

$$q_t^{(n)} = \mathbb{P}(N_t \leq n) = \sum_{i=0}^n e^{-\lambda_t} \frac{\lambda_t^n}{n!}$$

şeklinde yazacağız.

Önerme 1.2.1. $i, j, k, n \in N$ değerleri için $0 < k < j < i \leq n \leq N_0$ durumunda

i.

$$\mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) = \alpha_t \frac{i}{n+1},$$

ii.

$$\mathbb{E}(m_t^i m_t^j | N_t = n) = \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)},$$

iii.

$$\mathbb{E}((m_t^i)^2 | N_t = n) = \alpha_t^2 \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{i}{n+1},$$

iv.

$$\mathbb{E}((m_t^i)^3 | N_t = n) = \alpha_t^3 \frac{i(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + 3\alpha_t^2 \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{i}{n+1},$$

v.

$$\mathbb{E}((m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n) = \alpha_t^3 \frac{j(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)},$$

vi.

$$\mathbb{E}((m_t^j)^2 m_t^i | N_t = n) = \alpha_t^3 \frac{j(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)},$$

vii.

$$\mathbb{E}(m_t^i m_t^j m_t^k | N_t = n) = \alpha_t^3 \frac{k(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

eşitlikleri gerçekenir.

Kanıt. Buradaki kanıt teknikleri Önerme 1.1.2'deki kullanılan tekniklerle benzerlik göstermektedir. Bu nedenle sadece önemli noktaları vurgulayıp aynı hesaplamaları gerektiren satırları atlayacağız.

(i.) Öncelikle

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) &= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(\tilde{m}^i(w_i) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\ &= \int_{\mathbf{D}_t^n} \alpha w_i \frac{n!}{t^n} dw = \alpha I_i = \alpha_t \frac{i}{n+1} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

(ii.) Süreçlerin bağımsızlığından dolayı

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(m_t^i m_t^j | N_t = n) &= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(\tilde{m}^i(w_i) | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(\tilde{m}^j(w_j) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\ &= \int_{\mathbf{D}_t^n} (\alpha w_i \alpha w_j) \frac{n!}{t^n} dw = \alpha^2 I_{i,j} = \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

(iii.) Poisson değişkeninin ikinci momenti kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((m_t^i)^2 | N_t = n) &= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}((\tilde{m}^i(w_i))^2 | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\ &= \int_{\mathbf{D}_t^n} (\alpha^2 w_i^2 + \alpha w_i) \frac{n!}{t^n} dw = \alpha^2 I_{i,i} + \alpha I_i = \alpha_t^2 \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{i}{n+1}. \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv.) Benzer bir yaklaşım ve Poisson dağılımının üçüncü momenti kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((m_t^i)^3 | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}((\tilde{m}^i(w_i))^3 | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} (\alpha^3 w_i^3 + 3\alpha^2 w_i^2 + \alpha w_i) \frac{n!}{t^n} dw = \alpha^3 I_{i,i,i} + 3\alpha^2 I_{i,i} + \alpha I_i \\
&= \alpha_t^3 \frac{i(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + 3\alpha_t^2 \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{i}{n+1}.
\end{aligned}$$

(v.) Değişkenlerin bağımsızlığı sayesinde

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}((\tilde{m}^i(w_i))^2 | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(\tilde{m}^j(w_j) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} (\alpha^2 w_i^2 + \alpha w_i)(\alpha w_j) \frac{n!}{t^n} dw = \alpha^3 I_{i,i,j} + \alpha^2 I_{i,j} \\
&= \alpha_t^3 \frac{j(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

(vi.) Bir öncekine benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}((m_t^j)^2 m_t^i | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}((\tilde{m}^j(w_j))^2 | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(\tilde{m}^i(w_i) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \alpha_t^3 \frac{j(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

(vii.) Değişkenlerin bağımsızlığı kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(m_t^i m_t^j m_t^k | N_t = n) \\
&= \int_{\mathbf{D}_t^n} \mathbb{E}(\tilde{m}^i(w_i) | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(\tilde{m}^j(w_j) | W = w, N_t = n) \mathbb{E}(\tilde{m}^k(w_k) | W = w, N_t = n) f_{W|N_t}(w|n) dw \\
&= \alpha_t^3 \frac{k(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

□

1.2.2. Kümülatif Talep

Bu bölümde piyasadaki kurulu sistemlerin ortaya koyduğu kümülatif talebi inceleyeceğiz. Bu amaçla kümülatif talep değişkenini

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_0} m_t^i$$

ile gösterelim. Sonuçları daha sade bir şekilde ifade edebilmek için şu tanımları yapalım:

$$\beta_k = \frac{1}{k+1} N_0(N_0+1)\dots(N_0+k)$$

Önerme 1.2.2. Kümülatif talep olan S_t 'nin ilk 3 momentini şöyle ifade edilir:

i.

$$\mathbb{E}(S_t) = \alpha_t \left(N_0 q_t^{(N_0)} - \frac{1}{2} \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right) + \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 (1 - q_t^{(N_0+1)})$$

ii.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t^2) &= \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \left[\alpha_t^2 \left(\frac{1}{12} - N_0 \right) - \frac{1}{2} \alpha_t \right] + \left[\lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right] \frac{1}{4} \alpha_t^2 + q_t^{(N_0)} [N_0 \alpha_t + N_0^2 \alpha_t^2] \\ &+ \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 (1 - q_t^{(N_0+1)}) + \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \beta_2 (3N_0 + 1) (1 - q_t^{(N_0+2)}). \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t^3) &= -\frac{1}{8} \alpha_t^3 \left[\lambda_t^3 q_t^{(N_0-3)} + 3 \lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right] \\ &+ \frac{1}{8} \alpha_t^2 \left[\alpha_t (6N_0 - 1) + 6 \right] \cdot \left[\lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right] \\ &- \frac{1}{4} \alpha_t \left[\alpha_t^2 N_0 (6N_0 - 1) - \alpha_t (1 - 12N_0) + 2 \right] \cdot \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \\ &+ \left[N_0^3 \alpha_t^3 + 3N_0^2 \alpha_t^2 + N_0 \alpha_t \right] \cdot q_t^{(N_0)} \\ &+ \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 (1 - q_t^{(N_0+1)}) + \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \beta_2 (3N_0 + 1) (1 - q_t^{(N_0+2)}) + \frac{\alpha^3}{\lambda^3} \beta_1 \beta_3 (1 - q_t^{(N_0+3)}) \end{aligned}$$

Kanıt. (i.) Öncelikle

$$\mathbb{E}(S_t | N_t = 0) = N_0 \mathbb{E}(m(t)) = N_0 \alpha_t$$

olduğunu gözlemleyelim. Daha sonra $1 \leq n \leq N_0$ için

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t | N_t = n) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) + \sum_{i=n+1}^{N_0} \mathbb{E}(m(t)) \\ &= \alpha_t \sum_{i=1}^n \frac{i}{n+1} + (N_0 - n) \alpha_t \\ &= \alpha_t \left(N_0 - \frac{n}{2} \right). \end{aligned}$$

Daha sonra $n > N_0$ değeri için ise

$$\mathbb{E}(S_t | N_t = n) = \sum_{i=1}^{N_0} \mathbb{E}(m_t^i | N_t = n) = \alpha_t \sum_{i=1}^{N_0} \frac{i}{n+1} = \alpha_t \frac{\beta_1}{n+1}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t) &= \sum_{n=0}^{N_0} \alpha_t (N_0 - \frac{n}{2}) \mathbb{P}(N_t = n) + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \alpha_t \frac{\beta_1}{n+1} \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= \alpha_t \left(N_0 q_t^{(N_0)} - \frac{1}{2} \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right) + \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 (1 - q_t^{(N_0+1)}). \end{aligned}$$

(ii.) Toplamın karesi

$$S_t^2 = \sum_{i=1}^{N_0} (m_t^i)^2 + 2 \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} m_t^i m_t^j$$

şeklinde yazılabilir. Bunu kullanarak $1 \leq n \leq N_0$ için

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_t^2 | N_t = n) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((m_t^i)^2 | N_t = n) + \sum_{i=n+1}^{N_0} \mathbb{E}((m^2(t))) \\ &= 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}(m_t^i m_t^j | N_t = n) + 2 \sum_{i=n+1}^{N_0} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(m(t)) \mathbb{E}(m_t^j | N_t = n) + 2 \sum_{i=n+2}^{N_0} \sum_{j=n+1}^{i-1} \mathbb{E}^2(m(t)) \\ &= \alpha_t^2 \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \sum_{i=1}^n \frac{i}{(n+1)} + \sum_{i=n+1}^{N_0} (\alpha_t^2 + \alpha_t) \\ &\quad + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} + 2 \sum_{i=n+1}^{N_0} \sum_{j=1}^n \alpha_t^2 \frac{j}{(n+1)} + 2 \sum_{i=n+2}^{N_0} \sum_{j=n+1}^{i-1} \alpha_t^2 \\ &= \frac{1}{4} n^2 \alpha_t^2 + n \left(\alpha_t^2 \left(\frac{1}{12} - N_0 \right) - \frac{1}{2} \alpha_t \right) + (N_0^2 \alpha_t^2 + N_0 \alpha_t). \end{aligned}$$

Aynı zamanda $n > N_0$ için

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^2|N_t = n) &= \sum_{i=1}^{N_0} \mathbb{E}((m_t^i)^2|N_t = n) + 2 \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}(m_t^i m_t^j|N_t = n) \\
&= \alpha_t^2 \sum_{i=1}^{N_0} \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \sum_{i=1}^{N_0} \frac{i}{(n+1)} + 2\alpha_t^2 \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{4} \alpha_t^2 \frac{(3N_0+1)\beta_2}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{\beta_1}{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Burada cebirsel işlemleri kullanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k)} \mathbb{P}(N_t = n) &= \sum_{n=N_0+1}^{\infty} e^{-\lambda_t} \frac{\lambda_t^n}{(n+k)!} \\
&= \frac{1}{\lambda_t^k} \sum_{n=N_0+k+1}^{\infty} e^{-\lambda_t} \frac{\lambda_t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{\lambda_t^k} (1 - q_t^{(N_0+k)}).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Benzer cebirsel hesaplamalar aracılığıyla aşağıdaki üç eşitlik elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{N_0} n \mathbb{P}(N_t = n) = \lambda_t q_t^{(N_0-1)}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=0}^{N_0} n^2 \mathbb{P}(N_t = n) = \lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=0}^{N_0} n^3 \mathbb{P}(N_t = n) = \lambda_t^3 q_t^{(N_0-3)} + 3\lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)}. \tag{2.4}$$

Bunlardan (2.2) ve (2.3) kullanılarak şu eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^2) &= \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \left[\alpha_t^2 \left(\frac{1}{12} - N_0 \right) - \frac{1}{2} \alpha_t \right] + \left[\lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right] \frac{1}{4} \alpha_t^2 + q_t^{(N_0)} [N_0 \alpha_t + N_0^2 \alpha_t^2] \\
&\quad + \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 (1 - q_t^{(N_0+1)}) + \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \beta_2 (3N_0 + 1) (1 - q_t^{(N_0+2)}).
\end{aligned}$$

(iii.) Öncelikle

$$\mathbb{E}(S_t^3|N_t = 0)$$

koşullu beklentisini ele alalım. Bu durumda değişkenlerin bağımsızlığı kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^3 | N_t = 0) &= \sum_{i=1}^{N_0} \mathbb{E} [m^3(t)] + 3 \sum_{i=1}^{N_0-1} \sum_{j=i+1}^{N_0} \mathbb{E} [m^2(t)] \mathbb{E} [m(t)] \\
&\quad + 3 \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E} [m^2(t)] \mathbb{E} [m(t)] + 6 \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (\mathbb{E} [m(t)])^3 \\
&= (\alpha_t^3 + 3\alpha_t^2 + \alpha_t)N_0 + 3(\alpha_t^2 + \alpha_t)N_0(N_0 - 1) + \alpha_t^3 N_0(N_0 - 1)(N_0 - 2) \\
&= N_0^3 \alpha_t^3 + 3N_0^2 \alpha_t^2 + N_0 \alpha_t.
\end{aligned}$$

İkinci olarak $0 < n \leq N_0$ durumunu ele alalım. O zaman değişkenlerin bağımsızlığını yine kullanarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^3 | N_t = n) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{N_t} m_t^i \right)^3 \mid N_t = n \right) + \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=N_t+1}^{N_0} m_t^i \right)^3 \mid N_t = n \right) \\
&\quad + 3 \cdot \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{N_t} m_t^i \right)^2 \mid N_t = n \right) \mathbb{E} \left(\sum_{i=N_t+1}^{N_0} m_t^i \mid N_t = n \right) \\
&\quad + 3 \cdot \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{N_t} m_t^i \mid N_t = n \right) \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=N_t+1}^{N_0} m_t^i \right)^2 \mid N_t = n \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki 4 terimi sırasıyla $K_1 + K_2 + K_3 + K_4$ olarak gösterelim. Önerme 1.2.1'i kullanarak her biri terimi hesaplayalım.

İlk terim şöyle hesaplanır.

$$\begin{aligned}
K_1 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [(m_t^i)^3 | N_t = n] + 3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E} [(m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n] \\
&\quad + 3 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E} [(m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n] + 6 \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \mathbb{E} [m_t^i m_t^j m_t^k | N_t = n] \\
&= \left[\alpha_t^3 \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + 3\alpha_t^2 \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \sum_{i=1}^n \frac{i}{(n+1)} \right] \\
&\quad + 3 \left[\alpha_t^3 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{i(i+1)(j+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{i(j+1)}{(n+1)(n+2)} \right] \\
&\quad + 3 \left[\alpha_t^3 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right] \\
&\quad + 6\alpha_t^3 \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n \frac{k(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \left[\frac{1}{4} \alpha_t^3 n + \alpha_t^2 n + \frac{1}{2} \alpha_t n \right] + 3 \left[\frac{1}{15} \alpha_t^3 n(n-1) + \frac{1}{8} \alpha_t^2 n(n-1) \right] \\
&\quad + 3 \left[\frac{1}{10} \alpha_t^3 n(n-1) + \frac{1}{8} \alpha_t^2 n(n-1) \right] + \frac{1}{8} \alpha_t^3 n(n-1)(n-2) \\
&= n^3 \left[\frac{1}{8} \alpha_t^3 \right] + n^2 \left[\frac{1}{8} \alpha_t^3 + \frac{3}{4} \alpha_t^2 \right] + n \left[\frac{1}{4} \alpha_t^2 + \frac{1}{2} \alpha_t \right].
\end{aligned}$$

İkinci terim ise

$$\begin{aligned}
K_2 &= \sum_{i=1}^{N_0-n} \mathbb{E} [m^3(t)] + 3 \sum_{i=1}^{N_0-n-1} \sum_{j=i+1}^{N_0-n} \mathbb{E} [m^2(t)] \mathbb{E} [m(t)] \\
&\quad + 3 \sum_{i=2}^{N_0-n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E} [m^2(t)] \mathbb{E} [m(t)] + 6 \sum_{k=1}^{N_0-n-2} \sum_{j=k+1}^{N_0-n-1} \sum_{i=j+1}^{N_0-n} (\mathbb{E} [m(t)])^3 \\
&= (\alpha_t^3 + 3\alpha_t^2 + \alpha_t)(N_0 - n) + 3(\alpha_t^3 + \alpha_t^2)(N_0 - n)(N_0 - n - 1) \\
&\quad + \alpha_t^3(N_0 - n)(N_0 - n - 1)(N_0 - n - 2) \\
&= -n^3 \alpha_t^3 + n^2(3N_0 \alpha_t^3 + 3\alpha_t^2) + n(-3N_0^2 \alpha_t^3 - 6N_0 \alpha_t^2 - \alpha_t) + (N_0^3 \alpha_t^3 + 3N_0^2 \alpha_t^2 + N_0 \alpha_t)
\end{aligned}$$

olur.

Üçüncü terim

$$\begin{aligned}
K_3 &= 3 \cdot \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n m_t^i \right)^2 \mid N_t = n \right) \left(\sum_{i=n+1}^{N_0} \mathbb{E}[m(t)] \right) \\
&= 3\alpha_t(N_0 - n) \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}((m_t^i)^2 \mid N_t = n) + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E}(m_t^i m_t^j \mid N_t = n) \right) \\
&= 3\alpha_t(N_0 - n) \left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_t^2 \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{i}{n+1} \right) + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_t^2 \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right) \\
&= 3\alpha_t(N_0 - n) \left(\frac{1}{4}n^2\alpha_t^2 + n \left(\frac{1}{12}\alpha_t^2 + \frac{1}{2}\alpha_t \right) \right) \\
&= -\frac{3}{4}n^3\alpha_t^3 + n^2 \left(\alpha_t^3 \left(\frac{3}{4}N_0 - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{2}\alpha_t^2 \right) + n \left(\frac{1}{4}\alpha_t^3 N_0 + \frac{3}{2}\alpha_t^2 N_0 \right).
\end{aligned}$$

Ve dördüncü terim ise

$$\begin{aligned}
K_4 &= 3 \cdot \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n m_t^i \mid N_t = n \right) \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=n+1}^{N_0} m_t^i \right)^2 \mid N_t = n \right) \\
&= 3 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(m_t^i \mid N_t = n) \right) \left(\sum_{i=1}^{N_0-n} \mathbb{E}[m^2(t)] + 2 \sum_{i=2}^{N_0-n} \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbb{E}[m(t)])^2 \right) \\
&= \frac{3}{2}\alpha_t n ((\alpha_t^2 + \alpha_t)(N_0 - n) + \alpha_t^2(N_0 - n)(N_0 - n - 1)) \\
&= \frac{3}{2}n^3\alpha_t^3 + n^2 \left(-3N_0\alpha_t^3 - \frac{3}{2}\alpha_t^2 \right) + n \left(\frac{3}{2}N_0^2\alpha_t^3 + \frac{3}{2}N_0\alpha_t^2 \right).
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
K_1 + K_2 + K_3 + K_4 &= -\frac{1}{8}n^3\alpha_t^3 + n^2 \left(\alpha_t^3 \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}N_0 \right) + \frac{3}{4}\alpha_t^2 \right) \\
&+ n \left(\alpha_t^3 \left(-\frac{3}{2}N_0^2 + \frac{1}{4}N_0 \right) + \alpha_t^2 \left(\frac{1}{4} - 3N_0 \right) - \frac{1}{2}\alpha_t \right) + (N_0^3\alpha_t^3 + 3N_0^2\alpha_t^2 + N_0\alpha_t)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bir sonraki adım olarak $n > N_0$ durumunu ele alalım.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^3 | N_t = n) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^{N_0} m_t^i \right)^3 \mid N_t = n \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N_0} \mathbb{E} [(m_t^i)^3 | N_t = n] + 3 \sum_{i=1}^{N_0-1} \sum_{j=i+1}^{N_0} \mathbb{E} [(m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n] \\
&\quad + 3 \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{E} [(m_t^i)^2 m_t^j | N_t = n] + 6 \sum_{k=1}^{N_0-2} \sum_{j=k+1}^{N_0-1} \sum_{i=j+1}^{N_0} \mathbb{E} [m_t^i m_t^j m_t^k | N_t = n] \\
&= \left[\alpha_t^3 \sum_{i=1}^{N_0} \frac{i(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + 3\alpha_t^2 \sum_{i=1}^{N_0} \frac{i(i+1)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \sum_{i=1}^{N_0} \frac{i}{(n+1)} \right] \\
&\quad + 3 \left[\alpha_t^3 \sum_{i=1}^{N_0-1} \sum_{j=i+1}^{N_0} \frac{i(i+1)(j+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \sum_{i=1}^{N_0-1} \sum_{j=i+1}^{N_0} \frac{i(j+1)}{(n+1)(n+2)} \right] \\
&\quad + 3 \left[\alpha_t^3 \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j(i+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \sum_{i=2}^{N_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j(i+1)}{(n+1)(n+2)} \right] \\
&\quad + 6\alpha_t^3 \sum_{k=1}^{N_0-2} \sum_{j=k+1}^{N_0-1} \sum_{i=j+1}^{N_0} \frac{k(j+1)(i+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \alpha_t^3 \frac{\beta_3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + 3\alpha_t^2 \frac{\beta_2}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{\beta_1}{(n+1)} \\
&\quad + 3\alpha_t^3 \frac{(4/15)\beta_3(N_0-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + 3\alpha_t^2 \frac{(3/8)\beta_2(N_0-1)}{(n+1)(n+2)} \\
&\quad + 3\alpha_t^3 \frac{(4/10)\beta_3(N_0-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + 3\alpha_t^2 \frac{(3/8)\beta_2(N_0-1)}{(n+1)(n+2)} \\
&\quad + 6\alpha_t^3 \frac{(1/12)\beta_3(N_0-1)(N_0-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \alpha_t^3 \frac{\beta_1\beta_3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_t^2 \frac{\beta_2 \left(\frac{9}{4}N_0 + \frac{3}{4} \right)}{(n+1)(n+2)} + \alpha_t \frac{\beta_1}{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Bu iki durumu birleştirirsek aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^3) &= -\frac{1}{8}\alpha_t^3 \left[\sum_{n=0}^{N_0} n^3 \mathbb{P}(N_t = n) \right] + \frac{1}{8}\alpha_t^2 [\alpha_t (6N_0 - 1) + 6] \cdot \left[\sum_{n=0}^{N_0} n^2 \mathbb{P}(N_t = n) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}\alpha_t [\alpha_t^2 N_0 (6N_0 - 1) - \alpha_t (1 - 12N_0) + 2] \cdot \left[\sum_{n=0}^{N_0} n \mathbb{P}(N_t = n) \right] \\
&\quad + [N_0^3 \alpha_t^3 + 3N_0^2 \alpha_t^2 + N_0 \alpha_t] \cdot \left[\sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{P}(N_t = n) \right] \\
&\quad + \alpha_t \beta_1 \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} \mathbb{P}(N_t = n) + \alpha_t^2 \beta_2 \left(\frac{9}{4} N_0 + \frac{3}{4} \right) \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \mathbb{P}(N_t = n) \\
&\quad + \alpha_t^3 \beta_1 \beta_3 \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \mathbb{P}(N_t = n).
\end{aligned}$$

Son olarak (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) numaralı eşitlikleri kullanarak sonucu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t^3) &= -\frac{1}{8}\alpha_t^3 \left[\lambda_t^3 q_t^{(N_0-3)} + 3\lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right] \\
&\quad + \frac{1}{8}\alpha_t^2 [\alpha_t (6N_0 - 1) + 6] \cdot \left[\lambda_t^2 q_t^{(N_0-2)} + \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{4}\alpha_t [\alpha_t^2 N_0 (6N_0 - 1) - \alpha_t (1 - 12N_0) + 2] \cdot \lambda_t q_t^{(N_0-1)} \\
&\quad + [N_0^3 \alpha_t^3 + 3N_0^2 \alpha_t^2 + N_0 \alpha_t] \cdot q_t^{(N_0)} \\
&\quad + \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 (1 - q_t^{(N_0+1)}) + \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \beta_2 (3N_0 + 1) (1 - q_t^{(N_0+2)}) + \frac{\alpha^3}{\lambda^3} \beta_1 \beta_3 (1 - q_t^{(N_0+3)})
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

□

Bu Önermenin bir sonucu olarak uzun vadeli beklenen değer ve varyans ifadelerini elde etmek mümkündür. Bu iki değeri t değişkeni üzerinden limit olarak elde edebiliriz.

Önerme 1.2.3. Eğer kümülatif talebin limit ifadesisini S_{tot}^D ile gösterirsek, bu değer beklenmesi ve varsyanısı şu şekilde gerçekleşir.

i. $\mathbb{E}[S_{tot}^D] = \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1,$

ii. $Var(S_{tot}^D) = \beta_1 \frac{\alpha}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 (2N_0 + 1) \right).$

Kanıt: Bir önceki Önerme’de verilen ifadelerin limitini almak her iki sonucu da kanıtlamak için yeterlidir.

1.2.3. Marjinal Talep

Azalan Kurulu Sistem fazında marjinal talebi ayrıca ele alacağız. Bunun için marjinal talebi $[t, t + \Delta t]$ zaman aralığında $D_{t,\Delta t}$ ile gösterelim. Piyasada n adet kurulu sistemin bulunduğu durumda olasılık ölçüsünü \mathbb{P}^n ile buna karşılık gelen beklenen değeri ise \mathbb{E}^n ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}|N_t = n)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}|N_t = n)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0-n}(D_{0,\Delta t})\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0-n}(S_{\Delta t})\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n).\end{aligned}$$

Burada $\mathbb{E}^{N_0-n}(S_{\Delta t})$ beklenen değeri piyasadaki kurulu sistem sayısını $N_0 - n$ ve zaman parametresini $t = \Delta t$ olarak ve Önerme 1.2.2 (i.) kullanılarak elde edilir.

Benzer bir şekilde ikinci ve üçüncü momentleri hesaplayabiliriz. Bunun için

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}^2) &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}^2|N_t = n)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0-n}(D_{0,\Delta t}^2)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0-n}(S_{\Delta t}^2)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}^3) &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}^3|N_t = n)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0-n}(D_{0,\Delta t}^3)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \mathbb{E}^{N_0-n}(S_{\Delta t}^3)\mathbb{P}^{N_0}(N_t = n).\end{aligned}$$

Son olarak merkezi momentleri

$$\begin{aligned} Var(D_{t,\Delta t}) &= \mathbb{E}^{N_0}([D_{t,\Delta t} - \mu_{D_{t,\Delta t}}]^2) = \mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}^2) - [\mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t})]^2, \\ \mathbb{E}^{N_0}([D_{t,\Delta t} - \mu_{D_{t,\Delta t}}]^3) &= \mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t}^3) - 3\mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t})Var(D_{t,\Delta t}) - [\mathbb{E}^{N_0}(D_{t,\Delta t})]^3 \end{aligned}$$

şeklinde ifade ederiz.

1.2.4. Verilen bir Zaman Periyodunda Sıfır Talep Gözlemlenme Olasılığı

Momentlere ek olarak, $P_0^D := \mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D)$ ile gösterilen sıfır yedek parça talebi gözlemlenme olasılığı azalan kurulu sistem durumunun bir diğer önemli özelliğidir. Analizimiz, azalan kurulu sistemin karmaşık yapısı nedeniyle sıfır talebi gözlemlenme olasılığının tam formülasyonunu elde edebilmek için daha yüksek dereceden integrallerle uğraşmamız gerektiğini ortaya koymaktadır. Bunun yerine, aşağıdaki sonuçta P_0^D için alt ve üst sınırlar geliştirilmiştir.

Önerme 1.2.4. t ve Δt 'nin pozitif reel sayılar, S_t^D ve N_t 'nin de daha önce tanımlandıkları gibi oldukları varsayalım. \tilde{P}_0 aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\begin{aligned} 1 - q_t^{N_0-1} + e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0 \alpha_{\Delta t}} &\left[e^{\lambda_t \exp(\alpha_{\Delta t}) + (\lambda/\alpha)(\exp(\alpha_{\Delta t}) - 1)} q^{(N_0)} [\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}} + (\lambda/\alpha)(e^{\alpha_{\Delta t}} - 1)] \right. \\ &\left. - \frac{(\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}})^{N_0}}{N_0!} \right]. \end{aligned}$$

\tilde{P}_0 , P_0^D 'ye alttan bir yaklaşımdır ve

$$E := e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t}} (e^{\lambda_{\Delta t}} - 1) \frac{\lambda_t^{N_0}}{N_0!} \left[\left(\frac{1 - e^{-\alpha_{\Delta t}}}{\alpha_t} + 1 \right)^{N_0} - 1 \right]$$

için $P_0^D \in [\tilde{P}_0, \tilde{P}_0 + E]$ olur.

Kanıt. Bu olasılık, N_t sürecinin değerlerine koşullandırdıktan sonra aşağıdaki gibi ayrıştırılmıştır.

$$\begin{aligned}
P_0 &= \mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D = 0) \\
&= \sum_{n=N_0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D = 0 | N_t = n) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&+ \sum_{n=0}^{N_0-1} \mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D = 0 | N_{t+\Delta t} = n = N_t) \mathbb{P}(N_{\Delta t} = 0) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&+ \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=n+1}^{N_0} \mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D = 0 | N_{t+\Delta t} = k, N_t = n) \mathbb{P}(N_{\Delta t} = k - n) \mathbb{P}(N_t = n) \\
&+ \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D = 0 | N_{t+\Delta t} = k, N_t = n) \mathbb{P}(N_{\Delta t} = k - n) \mathbb{P}(N_t = n)
\end{aligned}$$

Bu toplamları sırasıyla I_1 , I_2 , I_3 ve I_4 olarak adlandıralım. İlk olarak, $N_t = n$ olduğunda tüm sermaye malları t zamanından önce kullanımdan çıkarılmıştır. Bu sebepten $(t, t + \Delta t)$ aralığında yedek parça talebine sebep olan herhangi bir sermaye malı yoktur. Böylece I_1 'deki koşullu olasılık 1'e eşit olur ve bu sayede aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$I_1 = \mathbb{P}(N_t \geq N_0) = 1 - q_t^{(N_0-1)}.$$

İkinci olarak, eğer $N_{t+\Delta t} = n = N_t$ ise t zamanından önce n sermaye malı kullanımdan çıkarılmıştır ve geriye kalanlar $(t, t + \Delta t)$ zaman aralığı boyunca kullanılmaya devam eder. Böylece aşağıdaki olasılık elde edilir

$$\mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D = 0 | N_{t+\Delta t} = n = N_t) = \prod_{i=n+1}^{N_0} \mathbb{P}(m_{\Delta t}^i = 0) = e^{-(N_0-n)\alpha_{\Delta t}}$$

Bu da aşağıdaki eşitliği elde etmemizi sağlar

$$I_2 = \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{-N_0\alpha_{\Delta t}} e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t}} \frac{\lambda_t^n}{n!} = e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0\alpha_{\Delta t} + \lambda_t \exp(\alpha_{\Delta t})} q^{(N_0-1)} [\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}}].$$

Üçüncü toplam için verilen olay, zaman aralığı boyunca kullanılan sermaye malları ve $(t, t + \Delta t)$ arasındaki bir anda kullanımdan çıkarılan sermaye malları olarak ayrıştırılmıştır. Sermaye mallarının bağımsız olması ve Markov özellikleri kullanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{t+\Delta t}^D - S_t^D = 0 | N_{t+\Delta t} = k, N_t = n) &= \left[\prod_{i=k+1}^{N_0} \mathbb{P}(m_{\Delta t}^i = 0) \right] \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k-n} m_{\Delta t}^i = 0 | N_{\Delta t} = k - n\right) \\ &= e^{-(N_0-k)\alpha\Delta t} \int_{D_{\Delta t}^{k-n}} e^{-\alpha(w_1+w_2+\dots+w_{k-n})} f_{W|N_{\Delta t}}(w|k-n)dw. \end{aligned}$$

Eşitlik (1.5) ve eşitlik (1.6)'dan dolayı yukarıdaki integral aşağıdaki değere eşittir

$$\left(\frac{1 - e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha\Delta t}\right)^{k-n}.$$

Böylece üçüncü toplam aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=n+1}^{N_0} e^{-(N_0-k)\alpha\Delta t} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha\Delta t}\right)^{k-n} \mathbb{P}(N_{\Delta t} = k - n) \mathbb{P}(N_t = n) \\ &= e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0\alpha\Delta t} \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{\lambda_t^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{N_0} e^{k\alpha\Delta t} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\Delta t}}{\alpha\Delta t}\right)^{k-n} \frac{\lambda_{\Delta t}^{k-n}}{(k-n)!} \\ &= e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0\alpha\Delta t} \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{(\lambda_t e^{\alpha\Delta t})^n}{n!} \sum_{m=1}^{N_0-n} \left(\frac{e^{\alpha\Delta t} - 1}{\alpha\Delta t}\right)^m \frac{\lambda_{\Delta t}^m}{m!} \\ &= e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0\alpha\Delta t} \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{(\lambda_t e^{\alpha\Delta t})^n}{n!} \sum_{m=1}^{N_0-n} \left(\frac{\lambda}{\alpha}(e^{\alpha\Delta t} - 1)\right)^m \frac{1}{m!} \end{aligned}$$

Görmekteyiz ki $m = 0$ olduğunda I_2, I_3 'teki toplama karşılık gelmektedir. Dolayısıyla bu ikisini tek bir toplamda birleştirebilir ve aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$I_2 + I_3 = e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0\alpha\Delta t} \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{(\lambda_t e^{\alpha\Delta t})^n}{n!} \sum_{m=0}^{N_0-n} \left(\frac{\lambda}{\alpha}(e^{\alpha\Delta t} - 1)\right)^m \frac{1}{m!}.$$

Bu toplam yeniden düzenlenerek daha da basitleştirilebilir. Toplamların sırasını değiştirerek aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$I_2 + I_3 = e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0 \alpha_{\Delta t}} \sum_{k=0}^{N_0} \sum_{m+n=N_0-k} \frac{(\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}})^n}{n!} \left(\frac{\lambda}{\alpha} (e^{\alpha_{\Delta t}} - 1) \right)^m \frac{1}{m!} - \frac{(\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}})^{N_0}}{N_0!}.$$

İç toplam bir binom açılımıdır. Yani son satır aşağıdaki değere eşittir

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0 \alpha_{\Delta t}} \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{(N_0 - k)!} \left(\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}} + \frac{\lambda}{\alpha} (e^{\alpha_{\Delta t}} - 1) \right)^{N_0 - k} - \frac{(\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}})^{N_0}}{N_0!} \\ & = e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0 \alpha_{\Delta t}} \left[e^{\lambda_t \exp(\alpha_{\Delta t}) + (\lambda/\alpha)(\exp(\alpha_{\Delta t}) - 1)} q^{(N_0)} [\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}} + (\lambda/\alpha)(e^{\alpha_{\Delta t}} - 1)] - \frac{(\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}})^{N_0}}{N_0!} \right]. \end{aligned}$$

Bu nedenle, ilk 3 toplam olan I_1 , I_2 ve I_3 'ü birbirine ekleyerek aşağıdaki yaklaşım değerini elde ederiz,

$$1 - q_t^{(N_0-1)} + e^{-\lambda_t - \lambda_{\Delta t} - N_0 \alpha_{\Delta t}} \left[e^{\lambda_t \exp(\alpha_{\Delta t}) + (\lambda/\alpha)(\exp(\alpha_{\Delta t}) - 1)} q^{(N_0)} [\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}} + (\lambda/\alpha)(e^{\alpha_{\Delta t}} - 1)] - \frac{(\lambda_t e^{\alpha_{\Delta t}})^{N_0}}{N_0!} \right]$$

ki bu da \tilde{P}_0 'dir. $I_4 \geq 0$ olduğu için bu P_0 'ın alttan bir sınırıdır.

Ayrıca

$$I_4 = \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \int_{D_{\Delta t}^{k-n}} e^{-\alpha(w_1 + w_2 + \dots + w_{N_0-n})} f_{W|N_{\Delta t}}(w|k-n) dw \mathbb{P}(N_{\Delta t} = k-n) \mathbb{P}(N_t = n).$$

İlk olarak içerideki integral ele alınmıştır. Bu yüksek dereceli integral, yinelenen integraller halinde yazılabilir, öyle ki

$$\begin{aligned}
& \int_{D_{\Delta t}^{k-n}} e^{-\alpha(w_1+w_2+\dots+w_{N_0-n})} f_{W|N_{\Delta t}}(w|k-n)dw \\
&= \int_{w_{k-n}} \dots \int_{w_{N_0-n+1}} \frac{(1 - \exp(-\alpha w_{N_0-n+1}))^{N_0-n} (k-n)!}{(N_0-n)! \alpha^{N_0-n} \Delta t^{k-n}} dw_{N_0-n+1} \dots w_{k-n} \\
&\leq \int_{w_{k-n}} \dots \int_{w_{N_0-n+1}} \frac{(1 - e^{-\alpha \Delta t})^{N_0-n} (k-n)!}{(N_0-n)! \alpha^{N_0-n} \Delta t^{k-n}} dw_{N_0-n+1} \dots w_{k-n} \\
&= \frac{(1 - e^{-\alpha \Delta t})^{N_0-n} (k-n)! \Delta t^{k-N_0}}{(N_0-n)! \alpha^{N_0-n} \Delta t^{k-n} (k-N_0)!} \\
&= \left(\frac{1 - e^{-\alpha \Delta t}}{\alpha \Delta t} \right)^{N_0-n} \frac{(k-n)!}{(k-N_0)! (N_0-n)!}.
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlik I_4 için üstten bir sınır sağlar.

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq e^{-\lambda t - \lambda \Delta t} \sum_{n=0}^{N_0-1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-\alpha \Delta t}}{\alpha \Delta t} \right)^{N_0-n} \frac{(k-n)!}{(k-N_0)! (N_0-n)!} \frac{\lambda_{\Delta t}^{k-n} \lambda_t^n}{(k-n)! n!} \\
&= e^{-\lambda t - \lambda \Delta t} \sum_{n=0}^{N_0-1} \left(\frac{1 - e^{-\alpha \Delta t}}{\alpha \Delta t} \right)^{N_0-n} \frac{\lambda_{\Delta t}^{N_0-n} \lambda_t^n}{(N_0-n)! n!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\Delta t}^m}{m!} \\
&= e^{-\lambda t - \lambda \Delta t} \left(e^{\lambda \Delta t} - 1 \right) \frac{1}{N_0!} \sum_{n=0}^{N_0-1} \left(\frac{\lambda}{\alpha} (1 - e^{-\alpha \Delta t}) \right)^{N_0-n} \lambda_t^n \frac{N_0!}{(N_0-n)! n!}.
\end{aligned}$$

Binom açılımına göre son satır teoremden tanımlanan E 'ye eşittir. Böylece $I_4 \leq E$ elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\tilde{P}_0 = I_1 + I_2 + I_3 \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = P_0 \leq I_1 + I_2 + I_3 + E = \tilde{P}_0 + E.$$

Böylece ispat son satır ile tamamlanır. □

Önerme 1.2.4'nin sonuçlarıyla yapılan ön deneyler \tilde{P}_0 'nin P_0 'ın simüle edilen değerlerine çok yakın bir yaklaşım sağladığını gösterirken diğer taraftan üst sınır $\tilde{P} + E$ her zaman bu kadar yakın değerler göstermemektedir.

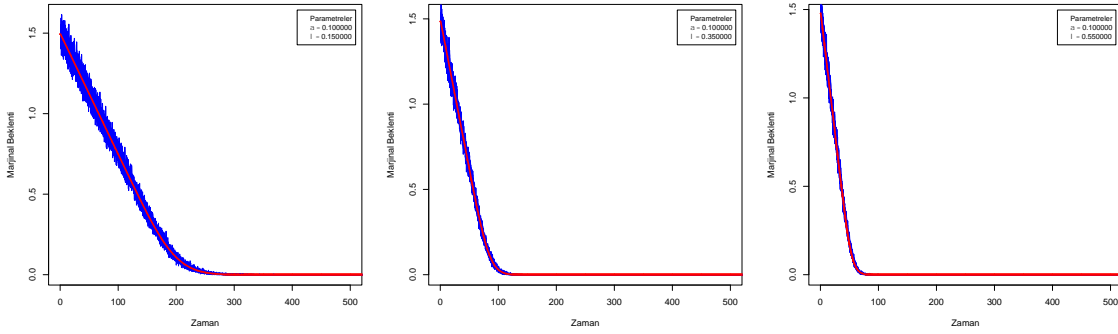
1.2.5. Simülasyon Sonuçları – Marjinal Talep

Yukarıda elde edilen momentler çalışmalar başlamadan önce kurgulanan simülasyonlar üzerinde test edilmiştir. Buna göre kurulu sistemlerin devreden çıkma parametreleri ve her bir kurulu sistemin (eş) yedek parça isteği üretme parametreleri ele alınarak piyasanın ihtiyaç duyduğu toplam yedek parça talebi sayısal olarak modellenmiş, bu sayısal modeller üzerine elde edilen teorik momentler yerleştirilmiştir. Birkaç farklı parametre ikilisi (α, λ) için elde edilen çalışmalar şu şekildedir. Bu simülasyonlarda başlangıçta piyasada 30 adet kurulu sistemin bulunduğu varsayılmıştır.

Birinci Moment

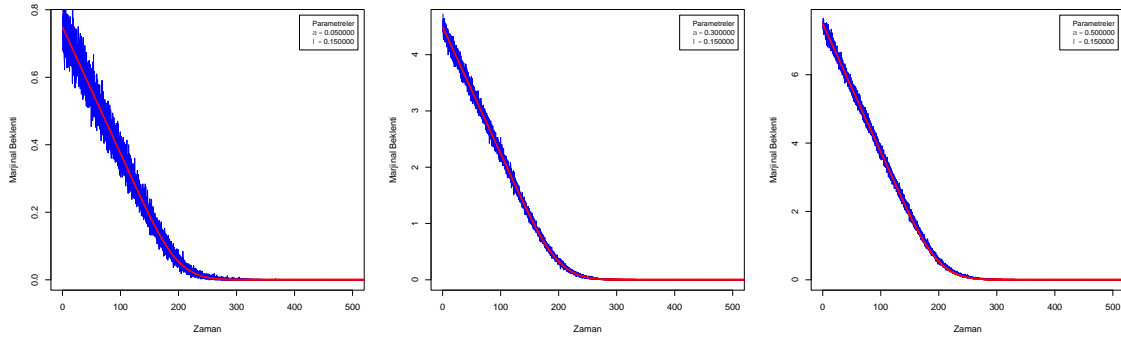
Marjinal talebin beklenen değeri 6 değişik parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik beklentiyi (birinci merkezi momenti), mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.

α sabitken



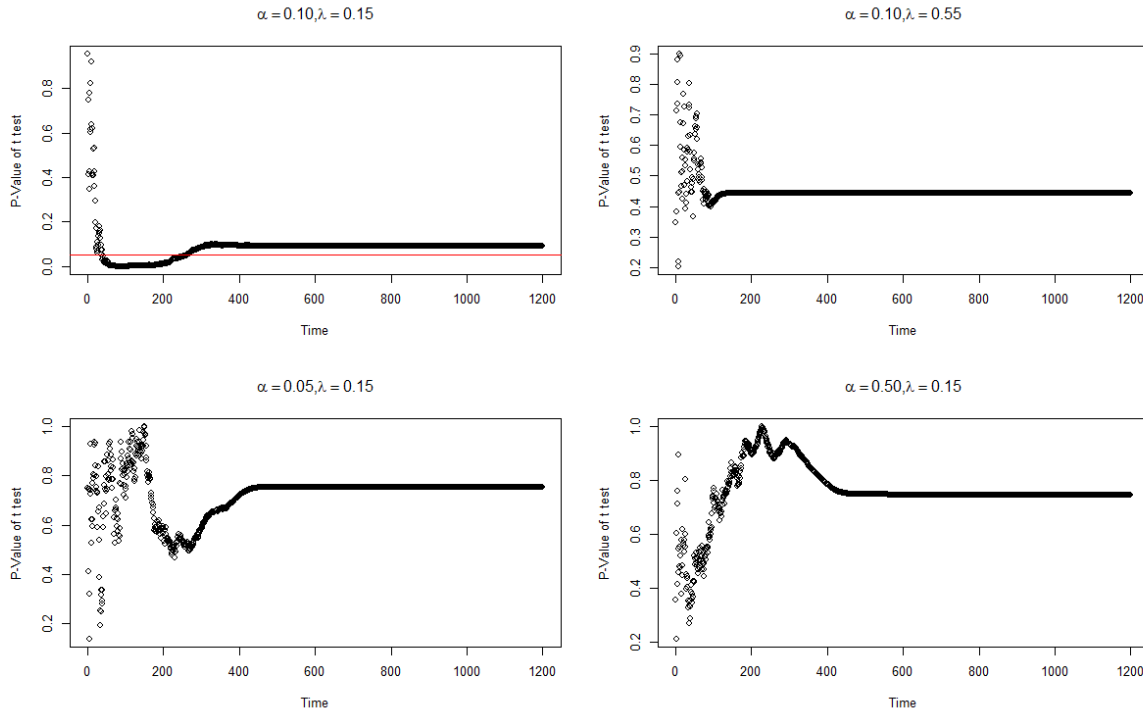
Şekil 18: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen α İçin

λ sabitken



Şekil 19: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momenti - Verilen λ İçin

Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir. Bu grafiksel örütşmenin yanında simülasyon ile teorik sonuçlar arasındaki uyum t-testleri ile de test edilmiştir. 4 farklı parametre değeri için t-testinden $H_0: S_{t_{sim}} - E[S_t]$ hipotezi için elde edilen p-değerleri aşağıdaki grafikte zamana karşı belirtilmiştir. Bu grafiklerden de görüldüğü gibi nadiren görünen zaman dilimleri hariç ($\alpha = 0.1, \lambda = 0.15 \ t \in [50, 221]$) birinci moment değerleri simülasyon değerleri ile mükemmel biçimde uyuşmaktadır. Bu simülasyonlarda zamanın başındaki sermaye ürünü sayısı $N_0 = 50$ olarak alınmıştır.

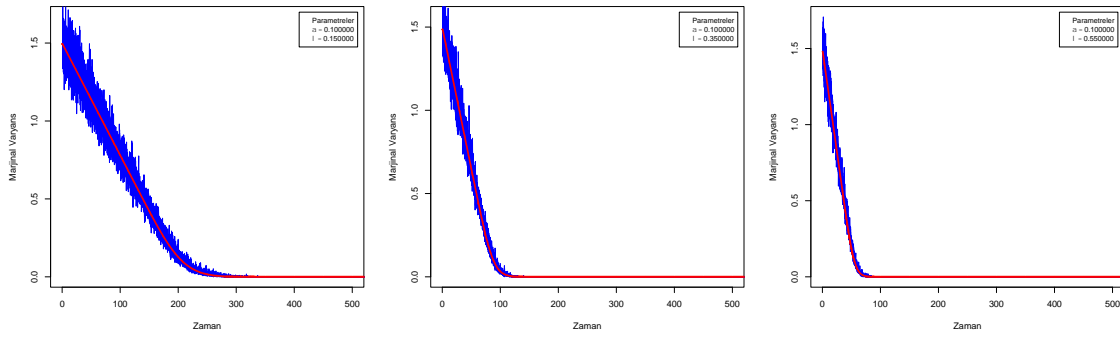


Şekil 20: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Birinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları

İkinci Moment

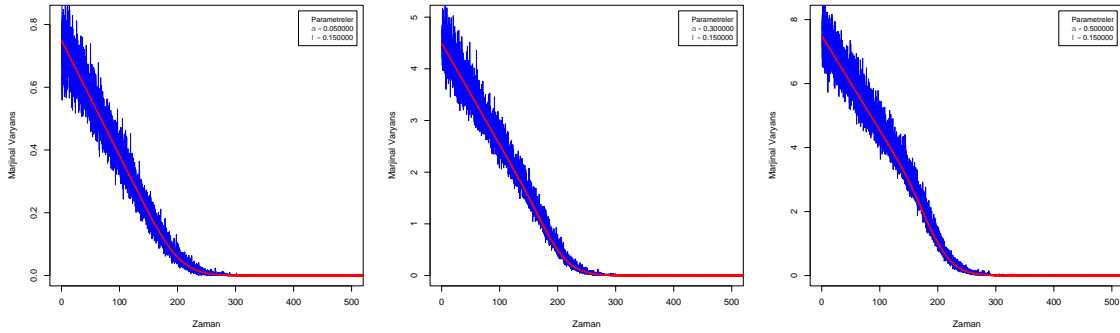
Marjinal talebin varyans değeri yine aynı 6 parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik varyansı (ikinci merkezi momenti), mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.

α sabitken



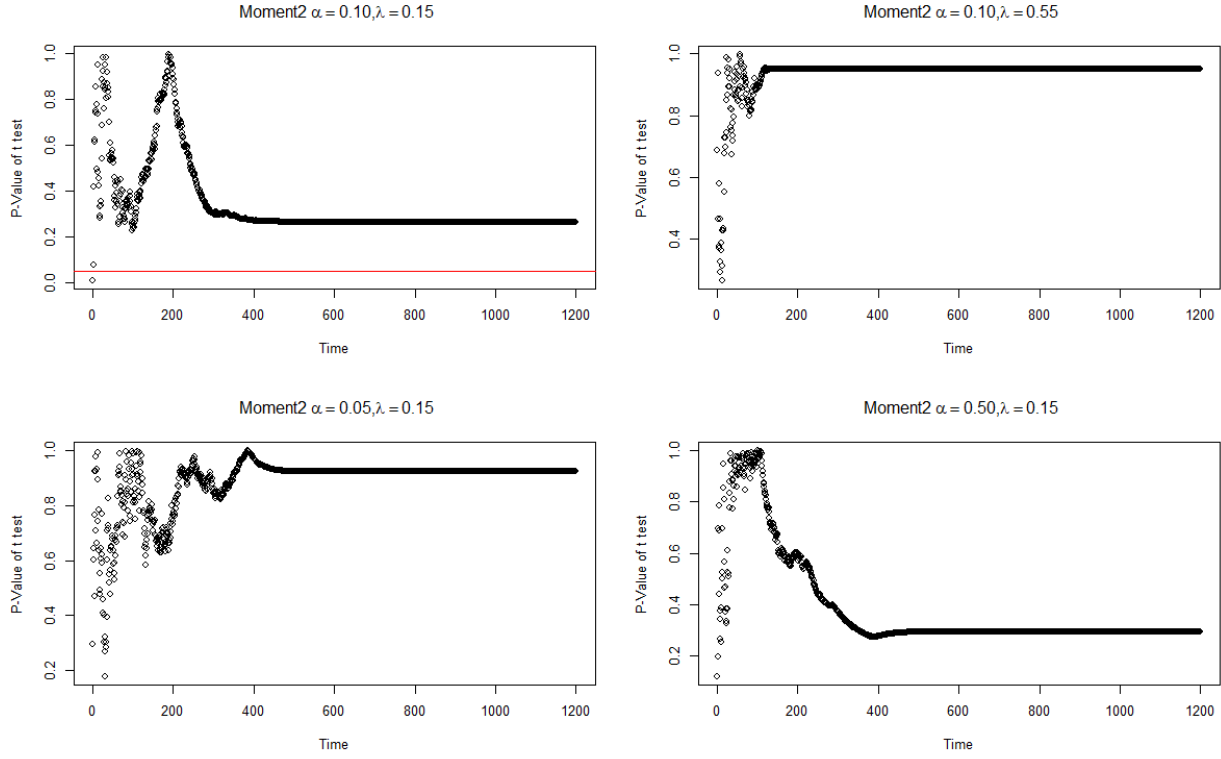
Şekil 21: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen α İçin

λ sabitken



Şekil 22: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momenti - Verilen λ İçin

Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir. İkinci moment için gerçekleştirilen deneylerin sonuçlarının grafiksel ifadesinin yanında ikinci momentler teste tabii tutulmuştur. Gerçekleştirilen t -testlerinin p değerleri zamana karşı plotlanmıştır. Bu sonuçlardan da anlaşılacağı gibi teorik ikinci momentler simülasyondaki değerler ile mükemmel olarak örtüşmektedir.

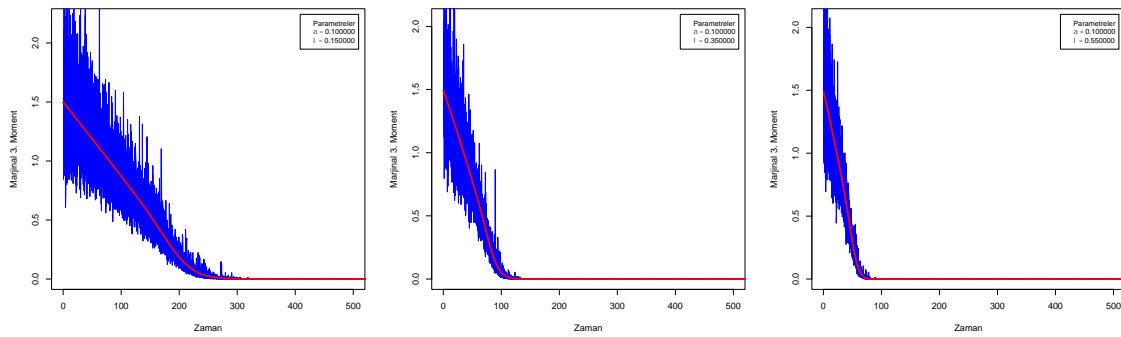


Şekil 23: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin İkinci Momentine Uygulanan t-testlerinin Sonuçları

Üçüncü Moment

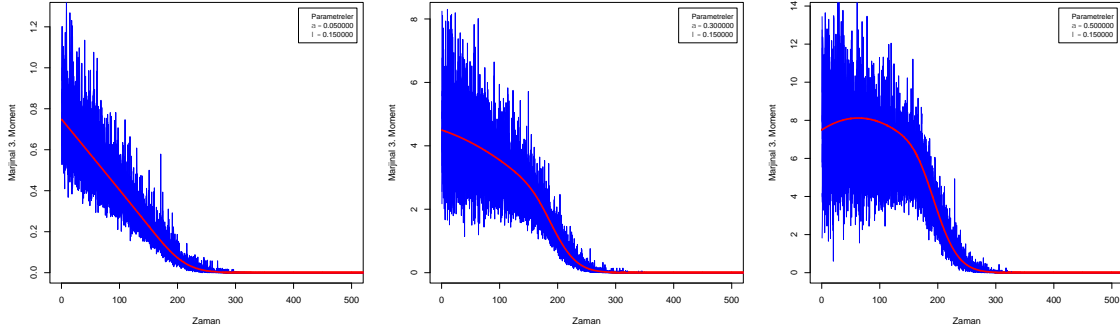
Marjinal talebin üçüncü merkezi moment değeri yine aynı 6 parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Bunlardan ilk üçünde α değerleri sabit tutularak λ değerleri üzerinde değişiklik yapılmış, son üçünde ise α değerleri değiştirilirken λ değerleri sabit tutulmuştur. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik üçüncü merkezi momenti, mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.

α sabitken



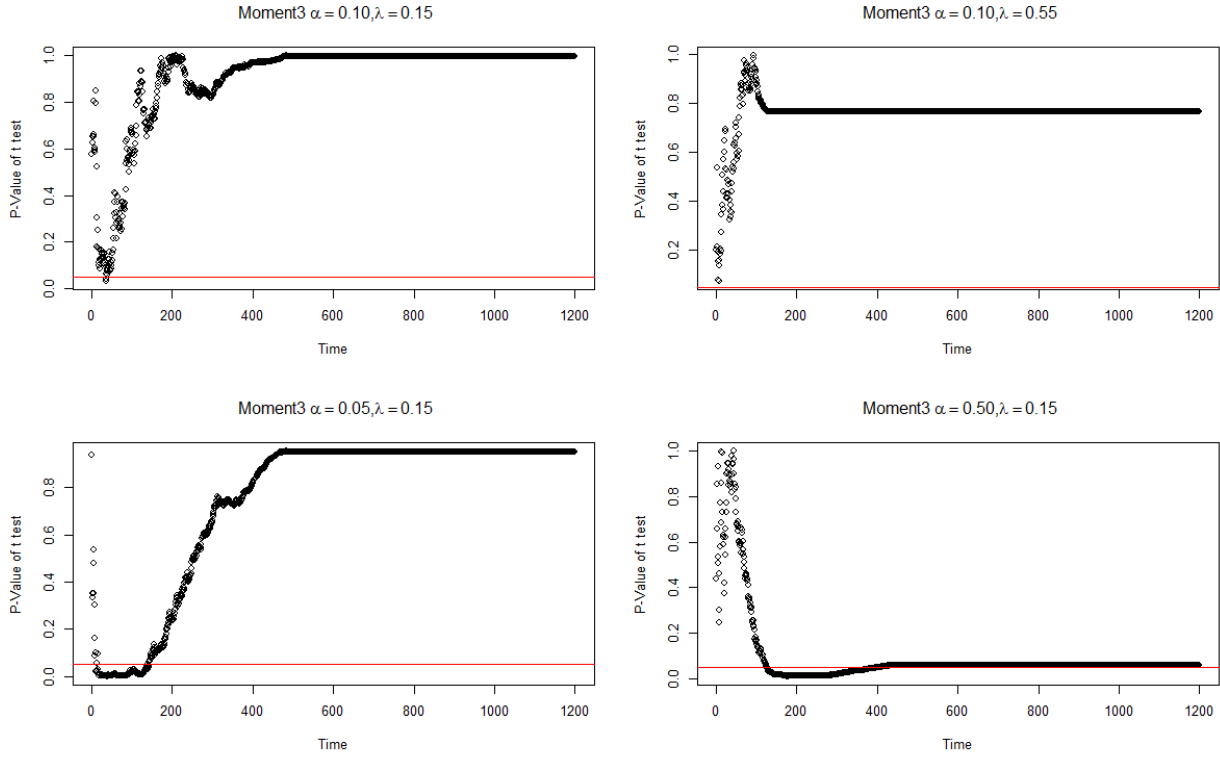
Şekil 24: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen α İçin

λ sabitken



Şekil 25: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momenti - Verilen λ İçin

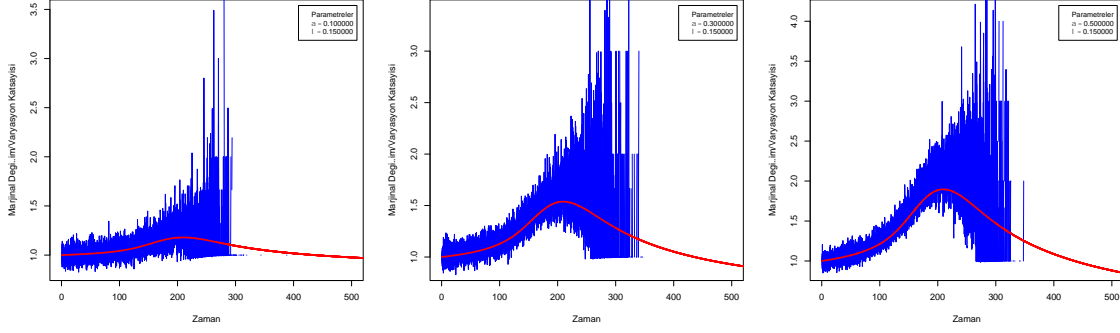
Şekillerden görüldüğü üzere teorik sonuç mükemmel bir şekilde simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir. Fakat moment derecesi arttıkça saçılım da giderek artmaktadır. Üçüncü momentlerin simülasyon sonuçları için uygulanan t -testlerinden elde edilen p değerleri zamana göre plotlanmıştır. Bu sonuçlar göstermektedir ki teorik momentler simülasyon değerlerinden istatistiksel olarak anlamlı bir fark göstermemektedir.



Şekil 26: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Üçüncü Momentine Uygulanan t -testlerinin Sonuçları

Değişim/Varyasyon Katsayısı (CV)

Marjinal talebin değişim/varyasyon katsayısı 3 parametre ikilisi üzerinde test edilmiştir. Kırmızı eğri yukarıda kanıtlarıyla verilen teorik ikinci merkezi momentin birinci momente oranını, mavi eğriler ise belirtilen parametre çifti üzerinde çalıştırılan simülasyonları göstermektedir.



Şekil 27: Azalan Kurulu Sistemler için Marjinal Talebin Değişim/Varyasyon Katsayıları

1.3. Marjinal Talep İçin Dağılımın Belirlenmesi

Yedek parça talebi için her bir periyotta gelecek talebin (marjinal talebin) ilk üç momentinin belirlenmesinden sonra bu stokastik talep için dağılımın seçilmesi işleminin yapılması gerekmektedir. Bu doğrultuda Ord (1967) tarafından önerilmiş hipergeometrik kesikli dağılım ailesinden faydalanılmıştır. Bu dağılım ailesi Ord tarafından

$$\Delta f_{r-1} = \frac{(a-r)f_{r-1}}{b_0 + b_1r + b_2r(r-1)}$$

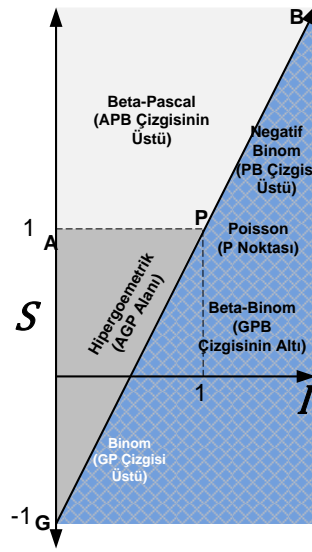
denklemleri ile karakterize edilmiştir. Bu denklemde olasılık dağılımının r 'ye eşit olma olasılığı f_r ile tanımlanmış ve $\Delta f_r = f_{r+1} - f_r$ olarak tanımlanmıştır. Bu karakterizasyonun yanında bu dağılım ailesinin iki temel özelliği bulunmaktadır:

- 1- Poisson, Negatif Binom, Binom gibi çok bilinen olasılık dağılımlarını içermektedir.
- 2- Dağılımlar arasındaki ilişki S-I düzleminin kullanılmasıyla ifade edilebilmektedir.

Öyle ki herhangi bir stokastik değişkenin k 'nci merkezi momenti $\bar{\mu}_k$ ile tanımlansın. Hipergeometrik dağılım ailesindeki dağılımlar $S = \frac{\bar{\mu}_3}{\bar{\mu}_2}$ ve $I = \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1}$ ile tanımlanan S-I düzlemi üzerinde Şekil 28'deki gibi yerleştirilebilir. Bu düzlemde APB çizgisinin üstü Beta-Pascal dağılımını, P noktası Poisson dağılımını, PB çizgisi Negatif Binom dağılımını, GP çizgisi Binom dağılımını APG noktaları arasında kalan alan Hipergeometrik dağılımı ve GPB çizgisinin altı ise Beta-Binom dağılımını vermektedir.

Literatürde bu dağılım ailesine benzer yaklaşım Adan vd. (1994) tarafından D/G/1 kuyruk sistemindeki gecikmelerin dağılımının karakterizasyonu için kullanılmıştır. Adan vd.'nin yaklaşımı dağılımların ilk iki momentine odaklanırken, Ord'un kesikli dağılım ailesi daha fazla bilgiyle daha geniş bir olasılık dağılım seti içinden seçim yapmaya olanak sağlamaktadır.

Bu projede yukarıda tek tek elde edilen momentler Şekil 28'de verilen dağılım ailesinde yerleştirilerek herhangi bir andaki yedek parça talebi için hangi dağılımın kullanılması gerektiği tespit edilmiştir.



Şekil 28: Hipergeometrik Kesikli Dağılım Ailesindeki Dağılımların Yerleşimi (Ord, 1967)

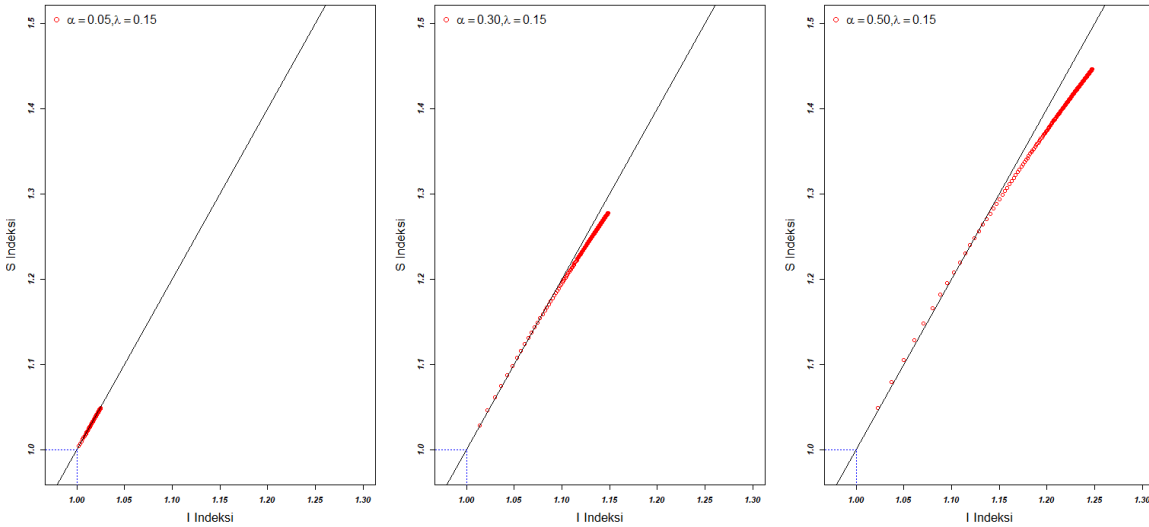
Bu deneylerde genel olarak sürekli bir zaman aralığı, $t \in [1, T]$, belirlenen bir adım büyüklüğü ile kesikli hale getirilerek zamanın her bir değeri için momentler hesaplanmış ve bu momentler kullanılarak marjinal talep dağılımı için Şekil 28'de verilen dağılımlardan hangisinin seçileceği tespit edilmiştir.

1.3.1. Artan Sermaye Malı Sayısı İçin Marjinal Talep Dağılımının Belirlenmesi

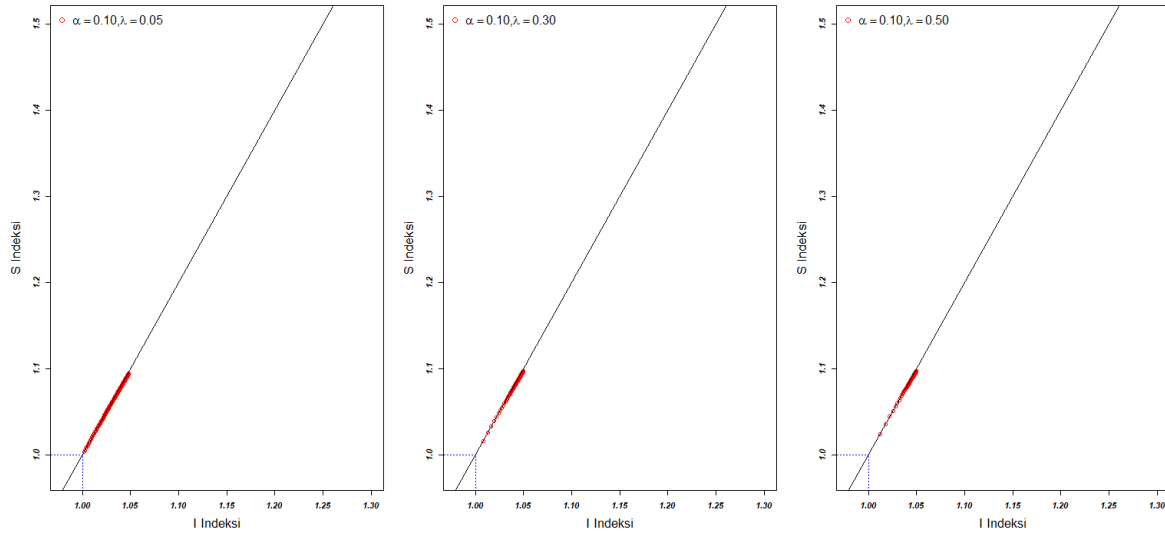
Artan sermaye malı sayısı için marjinal talep dağılımının belirlenmesi için ilk olarak sermaye mallarının satış hızı (λ) sabit tutularak her bir sermaye malının bozulma hızının (α) farklı değerleri $[1, 300]$ zaman aralığı ve adım büyüklüğünün 0.5 olduğu bir senaryo ($t \in [1,300], \Delta t = 0.5, \lambda = 0.15$ ve $\alpha \in \{0.05, 0.30, 0.15\}$), için marjinal talep dağılımlarının Şekil 28'de nereye düştüğü tespit edilmiştir. Akabinde benzer bir deney aynı zaman aralığı ve adım büyüklüğü için α 'nın sabit tutulması ve farklı λ değerleri ($\alpha = 0.1$ ve $\lambda \in \{0.05, 0.30, 0.50\}$) ile gerçekleştirilmiştir. İlk deneyin sonuçları Şekil 29'de ikinci deneyin sonuçları da Şekil 30'de verilmiştir.

Bozulma hızı düşük olan (bozulmalar arası zamanın uzun olduğu dayanıklı) parçalar için marjinal talep dağılımının Negatif Binom çizgisinin üzerinde olduğu tespit edilmiştir. Diğer yanda artan bozulma hızları için talep dağılımının zamanın ilk başlarında çalışan sermaye sayısı azken Negatif Binom dağılım izlediği, zamanın sonlarına doğru artan sermaye malı ile birlikte dağılımın Beta-Binom'a doğru kaydığı tespit edilmiştir. Yüksek hızdaki bozulmalar için Negatif Binom'dan Beta-Binom'a geçiş Şekil 29'daki en sağdaki grafikte tasvir edilmiştir.

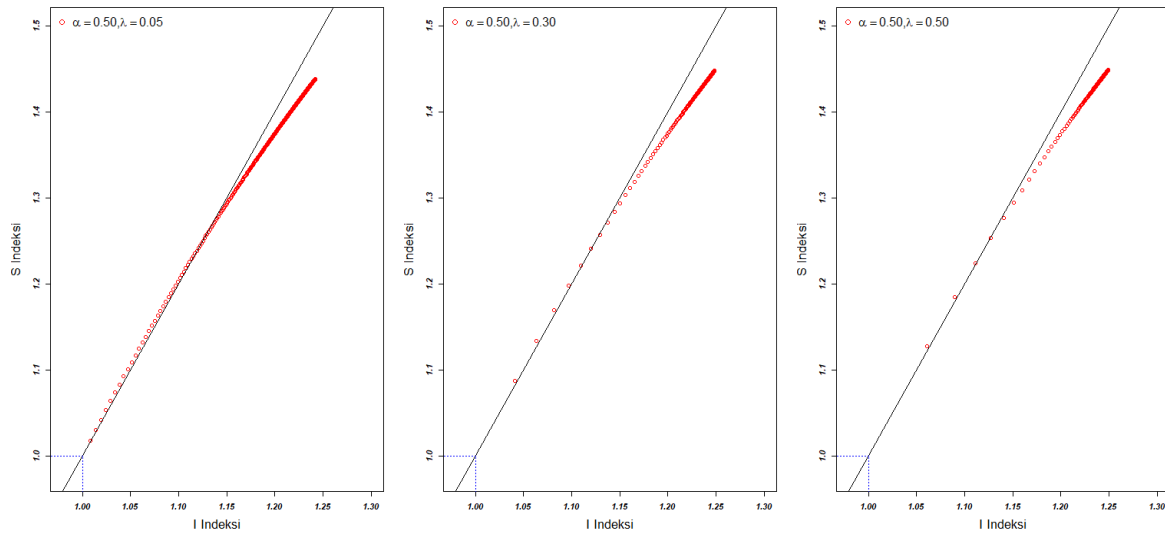
Diğer yandan bozulma hızı sabit iken farklı sermaye malı satış hızları için marjinal talebin dağılımının zamanda çok fazla değişme göstermediği gözlemlenmiştir. Sermaye malı satış hızının artan sermaye malı sayısı için marjinal talebe etki etmediği bozulma hızının yüksek tutularak farklı satış hızlarının değerlendirildiği üçüncü bir deneyde (Şekil 31) teyit edilmiştir. Yüksek bozulma hızı için satış hızı ne kadar farklı olursa olsun zamanın başlangıcında (sermaye malı sayısı azken) marjinal talep dağılımı Negatif-Binom olarak tezahür etmekte, zaman ilerledikçe ise yedek parça talebi Beta-Binom dağılımına doğru kaymaktadır. Benzer deneyler farklı α , λ , Δt ve T değerleri için daha büyük bir parametre uzayında tekrarlanmıştır. Bu genel deneylerden elde edilen kalitatif sonuçlar Şekil 29-Şekil 31 ile aynı olduğu için bu rapora dahil edilmemiştir.



Şekil 29: Verilen Sermaye Malı Satış Hızı İçin Farklı Bozulmaların Marjinal Talep Dağılımına Etkisi ($\lambda = 0.15$ ve $\alpha \in \{0.05, 0.30, 0.5\}$)



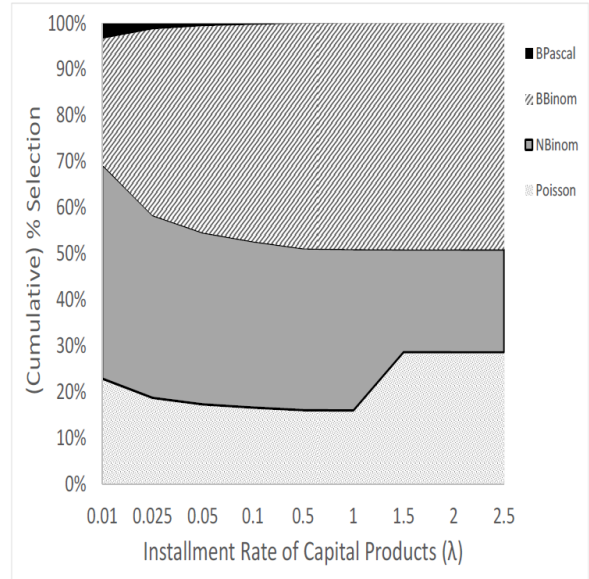
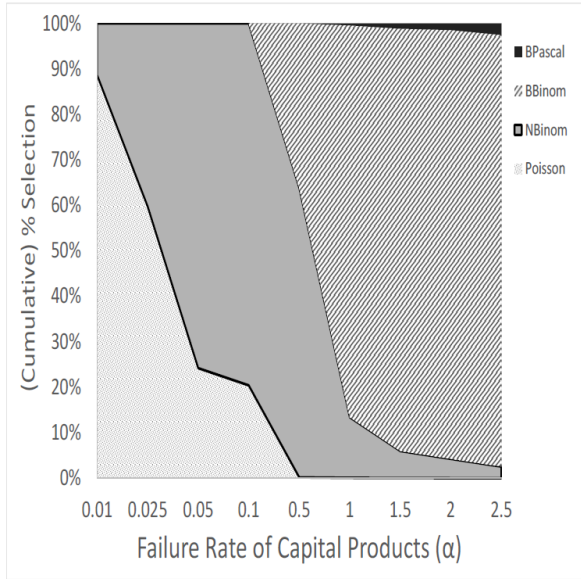
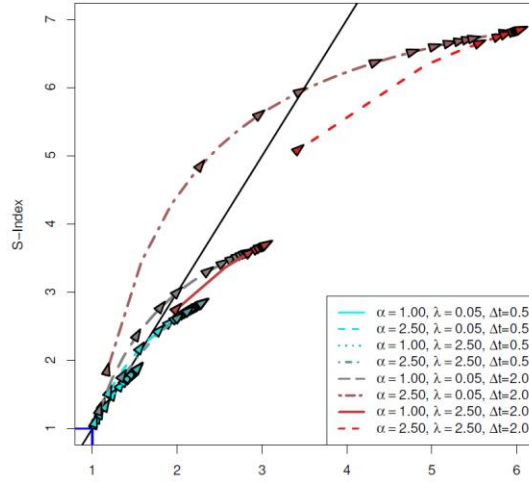
Şekil 30: Verilen Bir Bozulma Hızı ve Farklı Sermaye Mali Satış Hızlarının Marjinal Talep Dağılımına Etkisi ($\alpha = 0.1$ ve $\lambda \in \{0.05, 0.30, 0.50\}$)



Şekil 31: Verilen Bir Bozulma Hızı ve Farklı Sermaye Mali Satış Hızlarının Marjinal Talep Dağılımına Etkisi ($\alpha=0.5$ ve $\lambda \in \{0.05, 0.30, 0.50\}$)

Genel olarak bu deneylerde Ord'un hipergeometrik dağılım ailesinden seçilen dağılımların sadece Negatif Binom stratejisine göre çok daha iyi performans gösterdiği bulgulanmıştır. Ord'un önerdiği dağılım seçimi algoritmasında, farklı parameter değerleri için değişmekle beraber, genel olarak planlama ufkunun başında Poisson dağılımı seçilmekte, daha sonra Beta-Pascal dağılımına geçilmektedir. Sonrasında is sırasıyla Negatif Binom ve Beta-Binom dağılımları kullanılmaktadır. Zamana karşı dağılım seçimindeki bu değişim aşağıdaki grafikte açıkça belirtilmiştir.

Farklı α ve λ değerleri için dağılımların seçilme sıklıkları ise Şekil 32’de belirtilmiştir. Öyle ki küçük α değerleri için Poisson ve Negatif Binom tercih edilirken, α değerleri büyüdükçe Negatif Binom ve Beta-Binom dağılımları kullanılmaktadır. Artan kurulu sistemler için Beta-Pascal dağılımının çok nadiren kullanıma alındığı bulgulanmıştır.



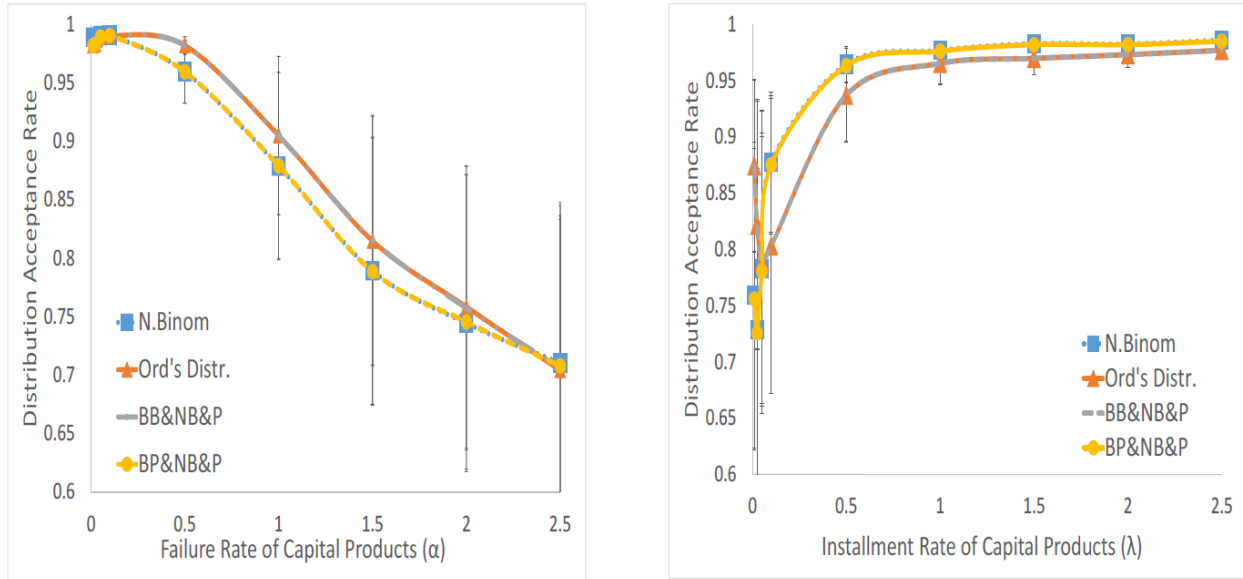
Şekil 32: Farklı α ve λ Değerleri için Dağılım Seçimleri

Yukarıda verilen talep dağılımlarının doğruluğunun test edilmesi için simülasyondan elde edilen marjinal yedek parça taleplerinin iyi-uyum testine (goodness-of-fit test) tabii tutulması

gerçekleştirilmiştir. İyi uyum testlerinde her bir zaman periyodu için, $n\Delta t, n = 1, \dots, \frac{T}{\Delta t}$, Ord'un kesikliği dağılım klasifikasyonuna göre seçilecek bir dağılımın simülasyondaki ampirik dağılımdan ne kadar farklı olduğu test edilmiştir. Bu doğrultuda dört temel dağılım seçme stratejisi izlenmiştir:

1. Tüm zaman noktaları için Negatif Binom dağılımı kullanılması (N.Bibom)
2. Ord'un hipergeometrik dağılım ailesinden seçim yapılması (Ords-Distr),
3. Beta-Binom, Negatif Binom ve Poisson (BB&NB&P)
4. Beta-Pascal, Negatif Binom ve Poisson (BP&NB&P)

Bu dört dağılım seçme stratejisi, 245 farklı parametre kombinasyonu için denenmiş ve bu parametrelerle gerçekleştirilen simülasyonlarda seçilen dağılımın zamanın % kaçında simulasyondan farksız olduğu analiz edilmiştir. Her bir parametrenin simülasyonundan elde edilen ortalama kabul istatistiği ($T/\Delta t$ zaman periyodunun % kaçında önerilen dağılım red edilememiştir istatistiği) farklı α, λ değerleri için grafiğe dökülmüştür.



Şekil 33: Dağılım Seçme Stratejilerinin Kabul İstatistikleri

Gerçekleştirilen iyi uyum testlerinde kullanılan dağılımların parametre tahmini için temel olarak Momentler yöntemi tercih edilmiştir. Öyle ki Poisson ve Negatif Binom dağılımlarının olan λ, r ve p parametreleri teorik momentlerden elde edilen beklenen değer ve varyans değerleri kullanılarak hesaplanmıştır. Öyle ki,

$$\hat{\lambda}_{Poisson} = E[D_{t,\Delta t}],$$

$$\frac{Var(D_{t,\Delta t})}{E[D_{t,\Delta t}]} = \frac{1}{1 - \hat{p}_{NB}},$$

$$E[D_{t,\Delta t}] \frac{(1 - \hat{p}_{NB})}{\hat{p}_{NB}} = \hat{r}_{NB}.$$

Bununla beraber Beta-Binom ve Beta-Pascal dağılımlarının parametre tahmini için bu rapora ek olarak sunulan, Operations Research dergisine gönderilmiş olan makalenin *Online E-Companion* isimli eklinin Bölüm 4.1 ve Bölüm 4.2 kısımlarında verilen algoritmalar kullanılmıştır. Genel olarak açıklamak gerekirse, Beta-Pascal dağılımının 3 parametresi (α, β, r) dağılımın ilk üç momenti cinsinden ifade edilmiştir ve yukarıda hesaplanan momentlerle bu denklemler eşitlenerek bu parametrelerin tahminleyicileri elde edilmiştir. Bu tahminleyiciler, iyi uyum testlerinde kullanılmak üzere testlerin gerçekleştirildiği bilgisayar koduna eklenmiştir. Beta-Binom dağılımının parametreleri için ilk üç momentin yanında Bölüm 1.1 ve Bölüm 1.2'de verilen 0 talep gözlemlenme olasılığı da parametre tahmin algoritmasına dahil edilmiştir. Bu parameter tahmin algoritması Tripathi vd. (1994) tarafından önerilen denklemler oluşturulmuştur.

Yukarıda açıklanan parameter tahmin yöntemleri ile gerçekleştirilen, artan kurulu sistemlerdeki yedek parça talebinin dağılımı için gerçekleştirilen istatistiksel iyi uyum testlerinde, yukarıda belirtilen stratejilerden en önemlilerinin Ord'un dağılımı ile Negatif Binom dağılımı olduğu, ve bu iki dağılım arasındaki farkın α ve λ parametrelerinin çok küçük ve çok büyük değerleri için çok azaldığı, bulgulanmıştır. Bununla beraber artan kurulu sistemler için Ord'un kesikli talep dağılım ailesinin (ve Negatif Binom dağılımının) λ değerlerindeki değişimlere daha duyarsız olduğu, diğer taraftan artan α değerlerinin iyi uyum testlerindeki performansı ciddi şekilde azalttığı sonucuna ulaşılmıştır. Yukarıda belirlenen stratejiler için, farklı periyot uzunluklarında, iyi uyum testlerindeki kabul oranları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Görüldüğü gibi farklı periyot uzunlukları için dağılım seçim stratejileri arasında anlamlı bir fark bulunamamıştır.

Tablo 1: Artan Kurulu Sistemler için Farklı Dağılım Seçim Stratejilerinin Farklı Δt Değerleri için Performansı

Δt	N.Binom	Ord'un Dağılımları	BB&NB&P	BP&NB&P
2	0,83 ± 0,07	0,82 ± 0,07	0,82 ± 0,07	0,83 ± 0,07
1	0,90 ± 0,05	0,90 ± 0,07	0,90 ± 0,04	0,89 ± 0,05
0,5	0,96 ± 0,02	0,98 ± 0,07	0,98 ± 0,01	0,96 ± 0,02
Toplam	0,89 ± 0,03	0,90 ± 0,03	0,90 ± 0,03	0,89 ± 0,03

1.3.2. Azalan Sermaye Mali Sayısı İçin Marjinal Talep Dağılımının Belirlenmesi

Sermaye mallarının azaldığı durumda marjinal yedek parça talebinin dağılımını belirlemek için yukarıda anlatılan, S-/uzayı üzerinden seçim yapan Ord'un algoritması dikkate alınmıştır. Önemli

bir nokta olarak azalan sermaye malları için S-I uzayında systemin asla Negatif Binom çizgisinin üzerine çıkmadığı tespit edilmiştir. Bu önermenin gösterdiği üzere azalan sermaye malları için system Poisson, Negatif Binom ve Beta-Binom dağılımları arasında seyretmektedir.

Önerme 1.3.1 Marjinal talep süreci $D_{t,\Delta t}$ için, ardışık momentlerin oranı aşağıdaki limitlere sahiptir:

- i. $\lim_{t \rightarrow \infty} S^{(t)} = 1 + \alpha_{\Delta t}$,
- ii. $\lim_{t \rightarrow \infty} I^{(t)} = 1 + \alpha_{\Delta t} + \frac{\alpha_{\Delta t}}{1 + \alpha_{\Delta t}}$
- iii. $\lim_{t \rightarrow \infty} S^{(t)} - 2I^{(t)} + 1 = -\alpha_{\Delta t} - \frac{2\alpha_{\Delta t}}{1 + \alpha_{\Delta t}}$.

Kanıt Önerme 1.2.4 ve Denklem (1.1) kullanarak doğrudan hesaplama yaparak, ikinci merkezi momenti (varyans) aşağıdaki biçimde t 'nin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\mu_D(2)(t) = \lambda_t \alpha_{\Delta t} (1 + \alpha_{\Delta t}).$$

Aynı zamanda

$$\mu_D(1)(t) = \mathbb{E}(D_{t,\Delta t}) = \lambda_t \alpha_{\Delta t} + \alpha_{\Delta t} \left(\frac{1}{2} \lambda_{\Delta t} + 1 \right).$$

Böylece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_D(2)}{\mu_D(1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_t \alpha_{\Delta t} (1 + \alpha_{\Delta t})}{\lambda_t \alpha_{\Delta t}} = 1 + \alpha_{\Delta t}.$$

İkinci argüman için, Önerme 1.2.4 ve Denklem (1.1) kullanılarak doğrudan hesaplama yoluyla, üçüncü merkezi moment aşağıdaki formda yazılır

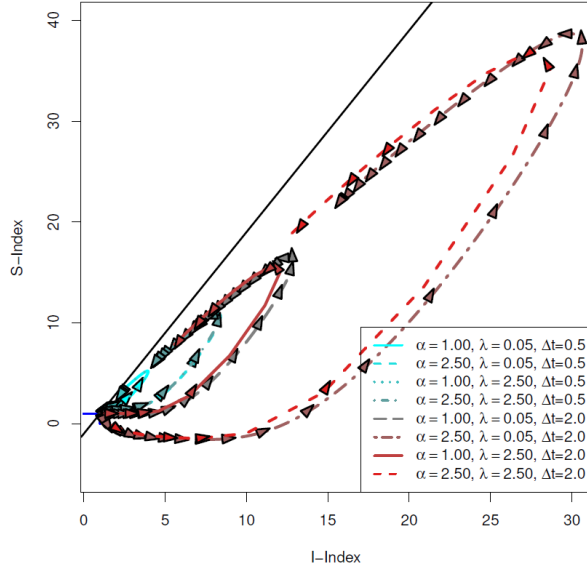
$$\mu_D(3)(t) = \lambda_t \alpha_{\Delta t} (1 + 3\alpha_{\Delta t} + \alpha_{\Delta t}^2) + K,$$

öyle ki K , t 'den bağımsız bir sabittir. Böylece

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu_D(3)}{\mu_D(2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_t \alpha_{\Delta t} (1 + 3\alpha_{\Delta t} + \alpha_{\Delta t}^2)}{\lambda_t \alpha_{\Delta t} (1 + \alpha_{\Delta t})} = \frac{1 + 3\alpha_{\Delta t} + \alpha_{\Delta t}^2}{1 + \alpha_{\Delta t}} = 1 + \alpha_{\Delta t} + \frac{\alpha_{\Delta t}}{1 + \alpha_{\Delta t}}.$$

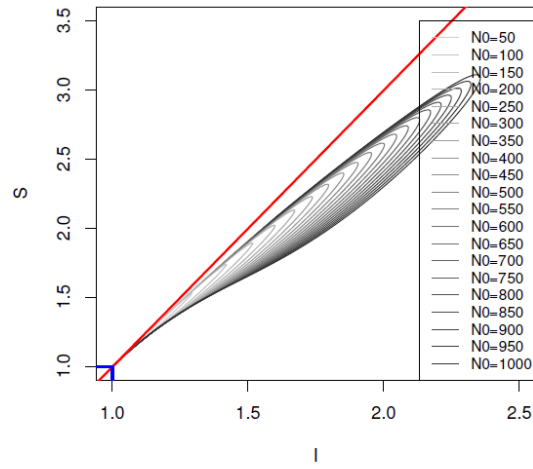
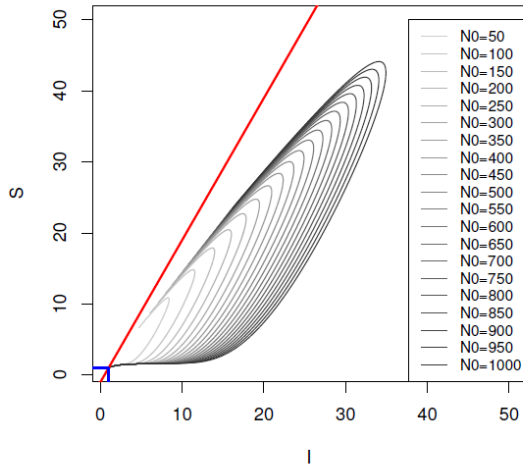
□

Artan kurulu sistemlere benzer olarak, systemin ilk başında Poisson dağılımı seçilmektedir. Sonrasında kısa bir süre Negatif Binom dağılımı kullanılsa da (α, λ) parametrelerinin büyüklüğüne bağımlı olarak S-I uzayında sistem Beta-Binom dağılımına doğru hareket etmektedir. Şekil 34'te farklı parametre değerleri ve N_0 için momentlerin S-I uzayındaki seyri zamana bağımlı olarak verilmiştir.



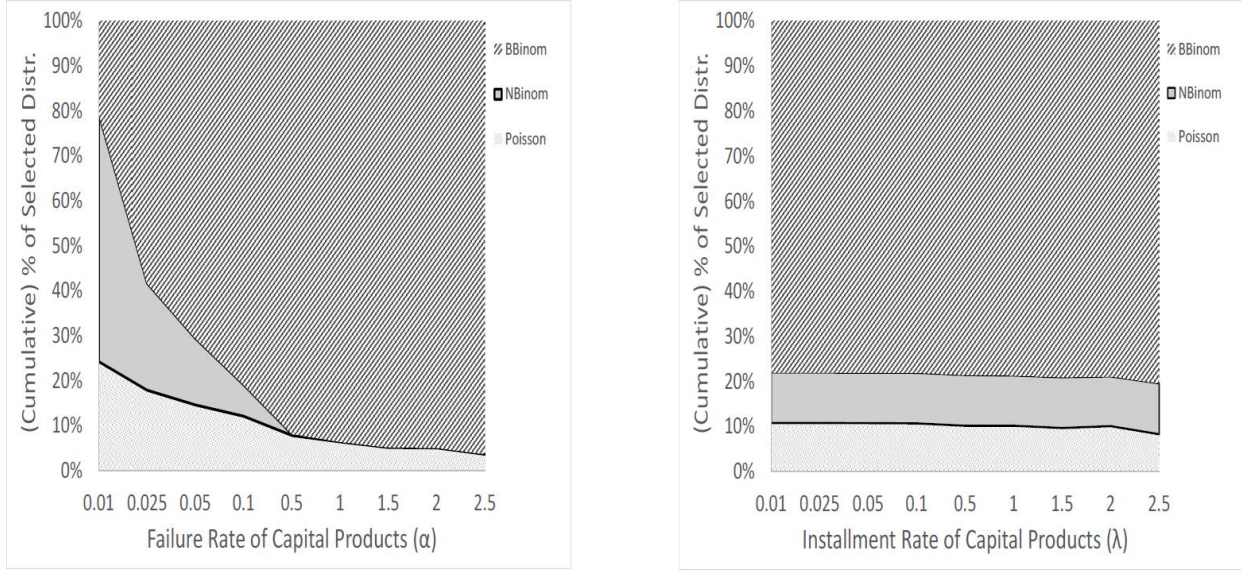
$\alpha = 2.50, \lambda = 0.10, \Delta t = 1.0$

$\alpha = 0.10, \lambda = 2.50, \Delta t = 1.0$



Şekil 34: Azalan Kurulu Sistemlerdeki Marjinal Talep Dağılımının Farklı Parametre Değerlerindeki Seyri

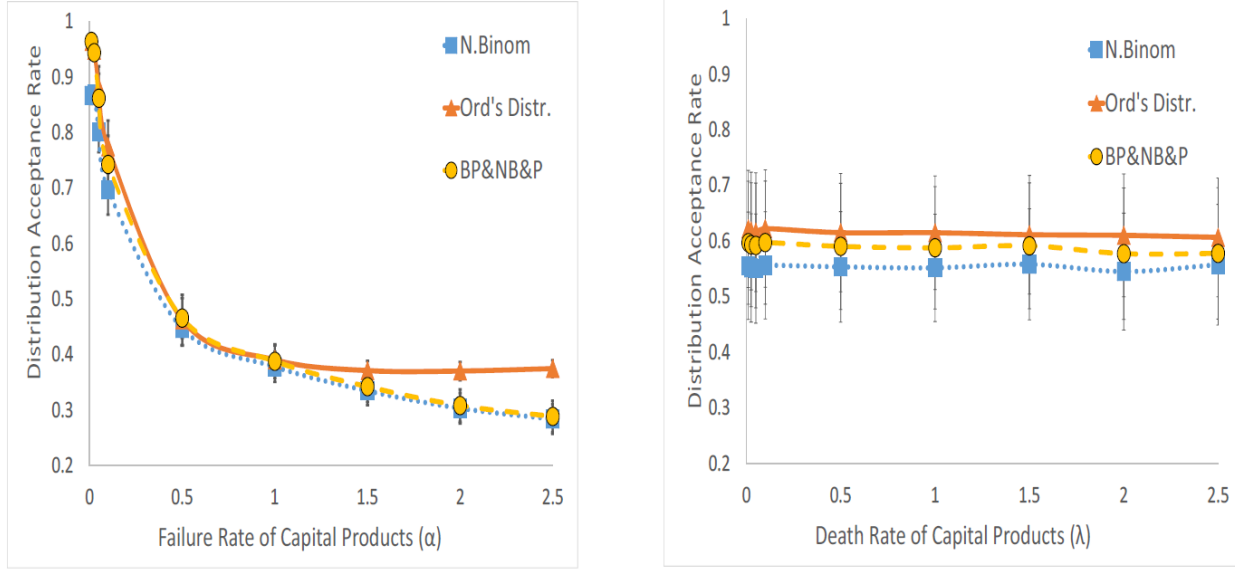
Ord'un dağılım seçiminin farklı parametre değerleri için nasıl değiştiğinin grafiksel gösterimi Şekil 35'te verilmiştir. Bu grafikten de görülebileceği gibi α 'nın küçük değerleri için Poisson ve Negatif Binom dağılımı ağırlıklı olarak (>80%) seçilirken, büyük değerleri için Negatif Binom dağılımı tamamen etkisiz hale gelmiş ve Poisson ve Beta-Binom dağılımları kullanılmaya başlanmıştır. İlginç olarak, gerçekleştirilen deneylerde hangi dağılımının seçileceğinin sermaye mallarının ölüm hızından (λ) bağımsız olduğu bulgusuna ulaşılmıştır.



Şekil 35: Farklı Parametre Değerleri için Hipergeometrik Dağılım Ailesinden Yapılan Seçimlerin Yüzdesi

Ord'un dağılım seçimi algoritmasına ek olarak Bölüm 1.3.1'de verilen 3 farklı dağılım seçim stratejisine de bu çalışma kapsamında yer verilmiştir. Öyle ki, farklı parametre değerlerinde elde edilen her bir simülasyondaki tüm zaman periyodları için, farklı stratejilerden seçilen dağılımlar iyi uyum testine tabii tutulmuştur. İyi uyum testlerinde, Poisson, Negatif Binom, Beta-Binom ve Beta Pascal dağılımları için, yukarıda anlatıldığı şekilde, parametre tahmin yöntemleri dikkate alınmıştır. İyi uyum testi olarak Ki-Kare iyi uyum testi kullanılmıştır. Literatürde bu testin, kesikli dağılımlar için oldukça başarılı sonuçlar verdiği kaydedilmiştir.

İyi uyum testinden elde edilen p -değerinden, o strateji için ortalama kabul oranı hesaplanmış ve tüm stratejinin başarı oranı olarak kaydedilmiştir. Şekil 36'da gösterildiği üzere, dağılım seçim performansları arasındaki temel fark α 'nın büyük değerleri için ortaya çıkmaktadır. Diğer yandan stratejiler arası performans farkı λ değerlerinden tamamen bağımsızdır. Bu sonuç, Şekil 35'te belirtilen sonuç ile tutarlılık göstermektedir. Bunun yanında dağılım seçim stratejilerinin performansları periyot uzunluğunda da artış göstermektedir (Tablo 2).



Şekil 36: Farklı Parametre Değerleri için Dağılım Seçim Stratejilerinin Performansları

Tablo 2: Azalan Kurulu Sistemler için Farklı Dağılım Seçim Stratejilerinin Farklı Δt Değerleri için Performansı

Δt	N.Binom	Ord'un Dağılımları	BP&NB&P
2	0,488 ± 0,06	0,576 ± 0,06	0,508 ± 0,07
1	0,557 ± 0,06	0,610 ± 0,06	0,594 ± 0,06
0,5	0,616 ± 0,04	0,660 ± 0,06	0,667 ± 0,06
Toplam	0,514 ± 0,03	0,615 ± 0,03	0,590 ± 0,04

2. Talebin Durağan Olduğu Durumda Bakım Sağlayıcı Firmaların Optimum Satın Alma Politikasının Araştırılması

Bu iş paketi kapsamında durağan yedek parça talebi ve Markovyan (ve durağan) ikincil marketlerin kapasitesinin varlığında, periyodik envanter sayımı sistemleri için toplam envanter maliyetini, satın alma, elde tutma, yoka düşme maliyetlerinin toplamı, minimize eden bir matematiksel model geliştirilmiş ve optimum envanter kontrol politikası belirlenmiştir.

Bu doğrultuda ilk olarak ikincil marketlerdeki parça sayısının planlama periyotları için kesikli bir Markov zinciri takip ettiği varsayılmıştır. Bu Markov zincirinin üzerinde tanımlandığı sonlu ve sayılabilir uzay Ω ile ifade edilecektir. Markov zincirinin bu uzayın farklı noktaları arasında P geçiş matrisi ile değiştiği varsayılmıştır.

İş paketinde Orijinal Parça Tedarikçisinin (OPT'nin) pozitif bir termin süresi, lt , sonrasında teslimat yaptığı, ikincil marketlere verilen siparişlerin ise aynı periyot içinde teslim edildiği varsayılmıştır. Sahadan gelen yedek parça talebi eğer yeterli ise mevcut stoktan karşılanmaktadır. Stoğun yetersiz kalması durumunda eksik kalan talep bir sonraki teslimatta karşılanmak üzere bekletilmektedir.

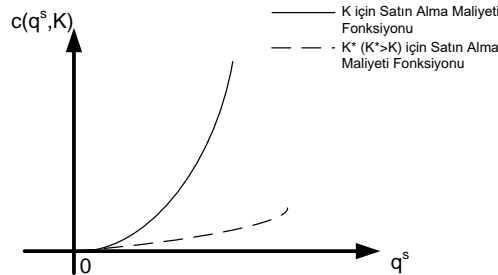
Her bir periyotta gerçekleşen olaylar aşağıdaki gibi listelenmiştir:

- Önceki periyotlarda OPT'ye verilen siparişlerden zamanı gelenlerin teslimatı yapılır.
- Bu periyoda ait siparişler (orijinal parça tedarikçisine ve ikincil markete siparişler verilir.)
- İkincil markete verilen siparişlerin teslimatı gerçekleşir.
- Rassal talep gerçekleşir. (talep realizasyonu)
- Elde tutma, talebi karşılayamama, sipariş verme maliyetleri hesaplanır ve belirli bir indirgeme oranı ile toplam maliyete eklenir.

Bunun yanında ikincil marketlerden parça satın alma maliyeti, marketteki parça sayısına bağımlı olarak değişebilmektedir. Parça maliyetinin market kapasitesine bağılı olarak değişmediği durumda toplam satın alma maliyeti alınan parça sayısının doğrusal artan bir fonksiyonu olmaktadır: $c(q, K) = c^s q^s, 0 \leq q^s \leq K$. Parça başı maliyet marketteki parça sayısı ile artıyorsa, toplam satın alma maliyeti satın alınan parçanın konveks artan bir fonksiyonu olacaktır. Bunu modellemek için satın alma maliyeti, $c(q, K)$, ile aşağıdaki fonksiyonla modellenmiştir:

$$c(q, K) = c_0 q^\xi K^\eta, \eta < 0, \xi \geq 1.$$

Bu modeldeki toplam maliyet fonksiyonu Şekil 37'deki gibi görselleştirilebilmektedir.



Şekil 37: İkincil Marketten Satın Alma Maliyeti Fonksiyonu

2.1. Orijinal Tedarikçinin Termin Süresi 1 Periyot Olduğunda Optimum Kontrol Politikası

Bu doğrultuda ilk olarak $lt = 1$ varsayılmıştır. Sonrasında ise bu varsayım kaldırılarak, $lt > 1$, matematiksel model genelleştirilmiştir. $lt = 1$ için tek periyotluk maliyeti minimize eden matematiksel fonksiyon şu şekilde belirlenmiştir:

$$V_T(K, y) = \min_{\substack{q^r \geq 0, \\ K \geq q^s \geq 0}} \{c^r q^r + c(q^s, K) + L(y + q^s + q^r)\}.$$

Bu modelde K karar verilecek periyotta ikincil market kapasitesini, c^r orijinal parça tedarikçisinin maliyetini vermektedir. $L(y) := E[h(y - D)^+ + b(D - y)^+]$ ise tek bir periyottaki elde tutma ve talebi karşılayamama maliyetinin beklenen değerini vermektedir.

$$V_t(K, y) = \min_{\substack{q^r \geq 0, \\ K \geq q^s \geq 0}} \{J_t(K, y, q^r, q^s)\}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T, \quad (2.1)$$

$$J_t(K, y, q^r, q^s) = c^r q^r + c(q_t^s, K) + L(y + q_t^s) + \alpha E[V_{t+1}(K_+, y + q^r + q_t^s - D_t)]. \quad (2.2)$$

K_+ ise bir sonraki periyotta markette bulunacak parça sayısını, α her bir periyottaki indirgeme oranını (*discount rate*) vermektedir.

İkincil marketten gelen ve orijinal tedarikçiden gelen parçalar arasında kalite farkı olmadığı için her iki tedarikçiden gelen teslimatlar aynı envantere dahil edilmektedir. Sonlu ufuklu dinamik minimizasyon problemi iki boyutlu $(K, y) \in (\Omega \times \mathbf{R})$ durum uzayının üzerinde tanımlanmaktadır. Durum uzayının ilk bileşeni herhangi bir periyotta ikincil markette bulunan parça sayısını, ikinci bileşeni ise periyodun başında elde bulunan envanter miktarını vermektedir.

Bu maliyet fonksiyonunda kullanılan $L(y)$ 'nin konveks olduğu envanter kontrol literatüründe bilinmektedir.

Önerme 2.1.1: Durağan talep ve $lt = 1$ varsayımları altında, Denklem 2.1 ve 2.2'de verilen çok periyotlu, sonlu ufuklu indirgenmiş toplam maliyet fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- Verilen K ve y değerleri için $J_t(K, y, q^r, q^s)$ fonksiyonu (q^r, q^s) 'de konvekstir.
- Verilen bir K için $V_t(K, y)$ fonksiyonu y 'de konvekstir.
- Optimum kontrol bir eşik değer politikası ile sağlanmaktadır.

İspat:

Bu önermenin ispatı tümevarım (*proof by induction*) yöntemiyle gerçekleştirilecektir. Başlangıç olarak $t = T$ için $J_T(K, y, q^r, q^s)$ fonksiyonu q^r 'de doğrusal olarak artmaktadır. $c(q_t^s, K)$ ve $L(y + q_t^s)$ fonksiyonları parametrelerinde konveks oldukları için $J_T(K, y, q^r, q^s)$ fonksiyonu (y, q^r, q^s) 'de konvektir. Konveksite minimizasyonda korunduğu için $V_T(K, y)$, y 'de konveks bir fonksiyondur. T periyodu için optimum bir q^r ve q^s değeri vardır. Dolayısıyla tümevarım $t = T$ için tamamlanmıştır. Önermede a , b ve c ifadelerinin $t+1$ için doğru olduğu varsayalım. Periyod t için, $c(q^s, K)$ ve $L(y + q^s)$ konveks fonksiyonlar ve $E[V_{t+1}(K, y + q^s - D)]$ konveks olduğu için $J_t(K, y, q^r, q^s)$, (y, q^r, q^s) 'de konvektir. $J_t(K, y, q^r, q^s)$ 'in (q^r, q^s) üzerinden minimizasyonu sonucu $V_t(K, y)$ verilen bir K için y 'de konvektir. Dolayısıyla a ve b ifadeleri ispatlanmıştır. b ifadesi c 'yi ispatlar.

□

Denklem 2.1 ve 2.2'de verilen matematiksel modeli kullanarak $lt = 1$ için optimum politikanın yapısını ispatlamak için ilk olarak aşağıdaki değişken dönüşümünü yapmak gereklidir:

$$\begin{aligned} w &= y + q^s, \\ v &= w + q^r. \end{aligned}$$

Buradan hareketle Denklem 2.1 ve 2.2'de verilen model aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{V}_t(K, y) = \min_{\substack{v \geq w, \\ K+y \geq w \geq y}} \{ \tilde{J}_t(K, y, v, w) \}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T, \quad (2.3)$$

$$\tilde{J}_t(K, y, v, w) = c^r(v - w) + c_0(w - y)^\xi K^\eta + L(w) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]. \quad (2.4)$$

Son periyot için Denklem 2.4 aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{J}_T(K, y, v, w) = c^r(v - w) + c_0(w - y)^\xi K^\eta + L(w). \quad (2.5)$$

Bu iş paketi kapsamındaki analitik çalışmalarda ilk olarak $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ olarak varsayılacak, bu parametrelerin genel değerleri için optimum politikanın yapısı ve maliyet fonksiyonunun alacağı değer nümerik olarak analiz edilecektir. $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ için Denklem 2.3,

$$\tilde{V}_t(K, y) = \min_{\substack{v \geq w, \\ K+y \geq w \geq y}} \{ c^r(v - y) + c_0(v - w) + L(w) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)] \}, \quad (2.6)$$

olarak ifade edilebilir. $-c^r + c_0 = c$ olarak tanımlanırsa Denklem 2.6'teki model,

$$\tilde{V}_t(K, y) = \min_{\substack{v \geq w, \\ K+y \geq w \geq y}} \{ c^r(v - y) + c(w - y) + L(w) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)] \}, \quad (2.7)$$

olarak ifade edilebilir. Minimizasyonun içindeki üçüncü ve dördüncü terimler kullanılarak,

$$\tilde{L}(K, y) = \min_{K+y \geq w \geq y} \{ c(w - y) + L(w) \}, \quad (2.8)$$

tanımlanır. Denklem 2.8'deki matematiksel modelin kısıtsız halini minimize eden değer w^* olarak ifade edilir. Buradan hareketle optimum fonksiyon aşağıdaki önerme ile karakterize edilebilir. Bu

önermenin ispatı için Fukuda (1964) tarafından geliştirilen yöntemin hızlı tedarikçinin sınır kapasite sahip olduğu duruma uyarlanması gerçekleştirilmiştir.

Önerme 2.1.2: Denklem 2.1 ve 2.2'deki matematiksel modeli minimize eden optimum politika, bir periyottaki market kapasitesinin fonksiyonu olan iki adet parametre, $v^*(K)$ ve $w^*(K) = (w^* \vee (y + K)) \wedge y$, ile ifade edilebilir: $q_t^s = (w_t^*(K) - y_t)$ ve $q_t^r = v_t^*(K) - w_t^*(K)$.

İspat:

Denklem 2.4'te verilen fonksiyonun optimizasyonu için $\tilde{L}(K, y)$ 'i minimize eden nokta olan w^* 'in $[y, y + K]$ aralığının neresine düştüğü incelenecektir. Öyle ki eğer $w^* < y < y + K$ ise $\tilde{L}(K, y) = L(y)$ eşit olacaktır. Bu durumda Denklem 2.7'deki minimizasyon

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq y} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Eğer $y < w^* < y + K$ ise $\tilde{L}(K, y) = c(w^* - y) + L(w^*)$ eşit olarak bulunur. Denklem 2.7'deki minimizasyonda $v > w^*$ için

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq w^*} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (2.9)$$

olarak ifade edilir. $v^* \leq w^*$ için

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(K, y) &= \tilde{L}(K, y) \\ &+ \min_{w^* \geq v \geq y} \{c^r(v - y) + c(v - y) + L(v) - \tilde{L}(K, y) \\ &+ \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(K, y) &= \tilde{L}(K, y) \\ &+ \min_{w^* \geq v \geq y} \{c^r(v - y) + c(v - w^*) + L(v) - L(w^*) \\ &+ \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

bulunur. Eğer $y + K < w^*$ ise $\tilde{L}(K, y) = c(K) + L(y + K)$. Bu durumda $v > w^* > y + K$ veya $w^* > v > y + K$ ise Denklem 2.7'deki minimizasyon

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq y+K} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (2.12)$$

$$\tilde{V}_t(K, y) = cK + L(y + K) + \min_{v \geq y+K} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (2.13)$$

olarak bulunur. $w^* > y + K > v \geq y$ ise

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(K, y) &= cK + L(y + K) \\ &+ \min_{v \geq y+K} \{c^r(v - y) + c(v - y - K) + L(v) - L(y + K) \\ &+ \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Denklem 2.8-2.14'ü tek bir modelde toplamak için $z = \min(y + K, w^*)$ ve

$$\Lambda(v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } v \geq z \\ L(v) - L(z) + c(v - z), & \text{eğer } v < z, \end{cases}$$

tanımlanır. $\Lambda(v)$ fonksiyonu sürekli ve konveks olduğu için Denklem 2.8-2.14'te verilen eşitlikler

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq y} \{c^r(v - y) + \Lambda(v) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (2.15)$$

ile ifade edilir. Buradan hareketle Denklem 2.15'deki minimizasyonun optimum değeri v^* olarak tanımlanırsa optimum politika şu şekilde karakterize edilir: Eğer $v^* > z$ 'se $q_t^r = (v^* - z)$ ve $q_t^s = z - y$; eğer $v^* \leq z$ ve $w^* > y$ ise $q_t^r = 0$ ve $q_t^s = z - y$; eğer $v^* \leq z$ ve $w^* \leq y$ $q_t^r = 0$ ve $q_t^s = 0$ olur.

□

Önerme 2.1.2'de analitik karakterizasyonu verilen optimum kontrol politikası, herhangi bir periyotta ikincil markette gözlemlenen parça sayısına bağlı baz stok seviyelerinden (*order-up-to levels*) oluşmaktadır. Sonuç raporunun bir sonraki bölümünde orijinal parça tedarikçisinin termin süresi genel bir tamsayı olduğunda matematiksel model ve optimum kontrol politikanın karakterizasyonu için yapılan çalışmalar verilmiştir.

2.2. Orijinal Tedarikçinin Termin Süresi Genel Bir Tamsayı Olduğunda Optimum Kontrol Politikası

Orijinal parça tedarikçisinin termin süresi genel bir tamsayı olduğunda Denklem 3-4'te verilen matematiksel modelin durum değişkenlerine siparişi verilmiş ancak henüz teslim edilmemiş (yoldaki) envanterinde dahil edilmesi gerekmektedir. Bu doğrultuda orijinal parça tedarikçisinin termin süresi $lt > 1$ olduğunda yoldaki siparişler $lt - 1$ boyutlu $\bar{\mathbf{q}}_t^r = (q_{t-lt+1}^r, q_{t-lt+2}^r, \dots, q_{t-1}^r)$ vektörü ile ifade edilir. Herhangi bir periyotta verilen yoldaki sipariş vektöre o periyot içinde orijinal parça tedarikçisine verilen sipariş miktarı, q_t^r , ile güncellenir ve $t + 1$. periyottaki yoldaki sipariş vektörü $\bar{\mathbf{q}}_{t+1}^r = (q_{t-lt+2}^r, q_{t-lt+3}^r, \dots, q_{t-1}^r, q_t^r)$ ile tanımlanır. Bu durumda sonlu planlama ufku için envanter maliyetlerini minimize eden matematiksel model aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$V_t(K, \bar{\mathbf{q}}_t^r, y) = \min_{\substack{q^r \geq 0 \\ K \geq q^s \geq 0}} \{J_t(K, \bar{\mathbf{q}}_t^r, y, q^r, q^s)\}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} J_t(K, \bar{\mathbf{q}}_t^r, y, q^r, q^s) & \\ &= c^r q^r + c(q_t^s, K) + L(y + q_t^s) \\ &+ \alpha E[V_{t+1}(K_+, \bar{\mathbf{q}}_{t+1}^r, y + q_{t-lt+1}^r + q_t^s - D_t)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

İş paketinin bu bölümünde ilk olarak bu modelin konveksitesi araştırılmış ancak modelin karar değişkenleri olan (q^r, q^s) 'de konveks olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bulunan bu sonuç literatürdeki daha basit modeller için elde edilmiş sonuç ile paraleldir (Whittemore ve Saunders, 1977). Bundan sonra bu matematiksel modelin durum uzayına Zipkin tarafından (2007)'de

geliştirilen transformasyon uygulanarak Hua (2015) paralel bir şekilde süpermodülerite ve L^h konveksite özelliğini taşıyıp taşımadığı araştırılmıştır. Bu denemeler sonucunda da çok boyutlu matematiksel modelin analitik karakterizasyonun oldukça büyük olan durum uzayına bağlı olduğu tespit edilmiştir. Bu analitik çalışmalardan sonra bu matematiksel modelin çözülmesi için sezgisel yaklaşımların denenmesi aşamasına geçilmiştir. Bu doğrultudaki sayısal deneyler raporun bir sonraki bölümünde anlatılmıştır.

2.3. Envanter Kontrol için Sezgisel Yaklaşımların Değerlendirilmesi

Yukarıda da anlatıldığı gibi $lt = 1$ için optimum kontrol politikası ikili endeks politikasına yakın bir politika olarak Önerme 2.1.2'de belirlenmiştir. Ancak $lt > 1$ için matematiksel modelin analitik olarak karakterize edilememesi nedeniyle optimum politikanın duruma bağlı (*state-dependent*) olduğu bu yüzden de sistemin kontrolü ve uygulanabilir bir çözüm için sezgisel yaklaşımlara ihtiyaç duyulduğu belirlenmiştir.

Buradan hareketle İP2 kapsamında ele alınan problemin literatürdeki

1. İkili endeks politikası (Veeraraghavan ve Scheller-Wolf, 2008)
2. Uyarlanmış baz-sürgün politikası (Allon ve Van Mieghem, 2010)
3. Vektör Baz-Stok Politiası (Sheopuri vd., 2010)
4. Sınırlandırılmış İkili Endeks Politikası (Sun, Van Mieghem, 2019)

sezgiselleri ile çözülmesi gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda yapılan çalışmalarda Tablo 3'te verilen parametre değerlerinden oluşan uzayı dikkate alınmıştır. Her bir parametre değeri için değer öteleme (value iteration) algoritması ile optimum maliyet değeri hesaplanmış daha sonra sezgisellerin maliyetlerinin optimum değerden ne kadar saptığına bakılmıştır.

Tablo 3: Durağan Dağılım için Sayısal Deneylerde Kullanılan Problem Parametreleri

Planlama Ufku	b	h	Talep Oranı (λ)	l^r	Market Senaryosu	c^r	η	ξ
120	15	5	Poisson (0.05)	1	1	5	0	1
360	55	3	Poisson (0.25)	2			-0.9	1.1
	95	1		3			-0.5	2
							-0.1	5

Tablo 3'te araştırmada gerçekleştirilen sayısal deneylerde kullanılan problem parametreleri verilmiştir. Bu parametrelerden b birim başına uygulanacak elde tutma maliyetini, h birim başına uygulanacak talebi karşılayamama maliyetini temsil etmektedir. Bu bölüm kapsamında yürütülen tüm sayısal deneylerde talep dağılımının durağan olduğu ve bir Poisson dağılımı izlediği varsayılmıştır ve Poisson dağılımının parametresi (talep oranı) λ ile ifade edilmiştir. l^r OPT'nin termin süresini göstermekte, c^r ise OPT'den alınan birim başına parça maliyetini temsil etmektedir. η ve ξ değerleri ise ikincil marketlerin satın alma maliyetini veren fonksiyonun ($c(q, K) = c_0 q^\xi K^\eta$) parametreleridir. Bu fonksiyondaki c_0 değerinin ise c^r 'ye eşit olduğu kabul edilmiştir.

Bu iş paketi kapsamındaki sayısal deneylerde Tablo 3'te verilen parametre değerlerinden oluşan uzayın bir alt uzayı kullanılmıştır. Literatürdeki çalışmalarda ikincil marketlerden satın alma maliyetinin doğrusal olduğu varsayılmaktadır. $\eta = 0$ ve $\xi = 1$ değerleri (proje önerisinde verilen parametre uzayına ek olarak) bu durumu temsil etmesi için kullanılmıştır. Burada, sezgisellerin ikincil marketten satın alma maliyetinin doğrusal ve doğrusal olmayan olduğu durumlardaki performanslarının karşılaştırılması amaçlanmıştır. Ayrıca OPT'nin termin süresinin 3 ve planlama ufkunun 360 periyot olduğu durumda birim başına elde tutma maliyeti (h) değerlerinden 55, birim başına talebi karşılayamama maliyeti (b) değerlerinden 3, η değerlerinden -0.5 ve ξ değerlerinden 2 değerlendirilmeye alınmamış, sadece geriye kalan ekstrem değerler değerlendirilmeye alınmıştır. Bunun sebebi OPT'nin termin süresinin 3 ve planlama ufkunun 360 periyot olduğu durumda durum uzayının boyutunun çok büyümesi ve bunun sonucunda da optimizasyon modellerinin nümerik olarak üzümünün çok uzun zaman almasıdır. Sadece u değerler değerlendirmeye alınarak sistemin ekstrem durumlardaki davranışının gözlemlenmesi amaçlanmıştır. Benzer Şekilde, planlama ufkunun boyutu 360'tan büyük olarak ele alındığında durum uzayının boyutunun çok büyümesi sonucunda optimizasyon modelinin nümerik olarak zm teknolojik olarak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle proje önerisinde yer alan, planlama ufkunun 600 ve 1800 periyot olduğu durumlar değerlendirilmeye alınmamıştır. Tablo 4 ve Tablo 5'te λ , planlama ufku ve termin süresi değişkenlerine göre durum uzaylarının toplam boyutları verilmiştir.

Tablo 4: $\lambda = 0.05$ Değeri İçin Durum Uzayının Toplam Boyutları – Durağan Dağılım

$\lambda=0.05$	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
It=1	496.840	4.514.440	12.564.040	113.292.040
It=2	4.450.030	40.565.230	112.968.430	1.019.304.430
It=3	39.761.600	364.215.200	1.015.260.800	9.169.368.800

Tablo 5: $\lambda = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları – Durağan Dağılım

$\lambda=0.25$	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
It=1	571.800	5.171.400	14.379.000	129.537.000
It=2	5.103.320	46.413.320	129.195.320	1.165.185.320
It=3	45.544.280	416.556.680	1.160.817.080	10.480.839.080

Optimizasyon modellerinin çözümünde durum uzayının boyutunu küçültmek için OPT'nin kapasitesi üzerinde yapay bir üst limit belirlenmiştir. Bu üst limit bir periyotta gözlemlenen maksimum talebin 4 olmasından ötürü 8 olarak seçilmiştir. İkincil marketlerin maksimum kapasitesi ise 4 olarak belirlenmiştir. Daha önce de belirtildiği üzere ikincil marketlerdeki parça sayısının rassal olduğu ve kesikli bir Markov zinciri takip ettiği varsayılmıştır. Bu Markov zincirinin üzerinde tanımlandığı sonlu ve sayılabilir uzay ise Ω ifade edilmiştir. Bu durumda $\Omega = \{0,1,2,3,4\}$ olarak tanımlanmıştır. Bu iş paketi boyunca Tablo 3'te de belirtildiği gibi 1 numaralı market senaryosu (simetrik) kullanmıştır. Bu senaryoya ait Markov geçiş olasılıkları matrisi aşağıdaki gibidir:

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Bu deneylerde dikkate alınan sezgisellerin açıklamaları aşağıda verilmiştir.

Vektörel Baz Stok Politikası: Bu politika Sheopuri vd. (2010) tarafından *Operations Research* dergisinde basılan bir makalede önerilmiştir. Sezgiselin çıkış noktası ikili tedarik sistemi ile kayıp satırlı envanter sistemi arasında gösterilen ilişkidir. Bu projede yavaş ve hızlı tedarikçiler için OPT'e verilen siparişler ve ikincil marketlerden alınan parçalar kullanılacaktır.

İkili Endeks Politikası: Bu sezgisel iki tedarikçili sistemlerde aradaki termin süresi farkı bir periyot olduğunda, durağan talep için optimal politika olarak gösterilmiştir (Fukuda, 1964). Sonraki çalışmalarda durağan talepli sistemler için parametre optimizasyon algoritmaları geliştirilmiştir. Bu projede Veeraraghavan ve Scheller-Wolf (2008)'un parametre optimizasyonu yavaş tedarikçi olarak OPT'nin hızlı tedarikçi olarak ikincil market olarak alınması ile uygulanacaktır.

Baz-Sürgün Sezgiseli: Bu politika normal tedarikçiye sabit miktarda ve hızlı tedarikçiye baz stok politikası ile sipariş vermeyi kural olarak kullanır. Doğal olarak elde edilecek baz stok parametresi

sabit sipariş değerinden etkilenecektir. Xin ve Goldberg (2017) *Manufacturing and Service Operations Management* dergisinde yayınlanan makalesinde bu politikanın durağan talep dağılımı altında asimptotik olarak optimum olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada politikanın sabit siparişin OPT'e, ikincil marketlerdeki yazdırmanın ise baz stok politikası ile yapılması planlanmıştır.

Bu sezgisellerin optimum politikadan performansları için gerçekleştirilen deneylerde sezgisellerin parametre optimizasyonu 1000 replikasyon ile gerçekleştirilen simülasyonlar aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Bu rapor kapsamında sezgisellerin optimumdan ortalama yüzde sapmaları Tablo 6'da verilmiştir. Bu deneylerde Vektör Baz Stok sezgiseli her bir replikasyon için Sınırlandırılmış İkili Endeks politikası (Sun, Van Mieghem 2019) tarafından geçildiği için, Tablo 6'dan çıkartılmıştır. Ulaşılan bu sonuç literatürdeki sonuçlarla uyumludur. Bu sonuçlardan da anlaşılacağı gibi optimuma en yakın performans ikili endeks politikasından elde edilmiştir.

Tablo 6: Sezgisel Politikaların Optimum Politikadan Sapmaları

İkili Endeks Politikası	Baz-Sürgün Sezgiseli	Sınırlandırılmış İkili Endeks
%4,2	%44,9	%6,5

3. Yaşam Döngüsünün Büyüme ve Azalış Aşamalarında Satın Alma Politikalarının Araştırılması

3.1. Kurulu Sistemlerin Büyüme ve Azalış Dönemlerindeki Durağan Olmayan Talep İçin Optimum Satın Alma Politikasının Araştırılması

Bu bölümde durağan olmayan yedek parça talebi altında periyodik envanter sayımı ile satın alma, elde tutma, yoka düşme maliyetlerinin toplamını minimize eden T periyotluk bir matematiksel model geliştirilmiş ve optimum envanter kontrol politikasının belirlenmiştir. Durağan olmayan yedek parça talebinin daha önceki bölümlerde elde edilen dağılım seçim algoritması ile belirlendiği kabul edilmiştir.

İkincil marketlerin yedek parça kapasitesinin ise yine bir kesikli Markov zinciri üzerinde tanımlı olduğu kabul edilmiş ve bu sonlu uzay Ω ile gösterilmiştir. Market kapasitesinin bu uzaydaki noktalar arasındaki geçişini P matrisine göre yaptığı varsayılmıştır. Durağan talebin incelendiği modelden farklı olarak P matrisinin sadece simetrik değil, rassal olarak artan ve rassal olarak

azalan halleri de sayısal deneylerde değerlendirilmeye alınmıştır. Bu şekilde kurulu sistemlerin ikincil marketlerin kapasitesi üzerindeki etkisinin modele yansıtılması amaçlanmıştır.

İkincil marketlerin siparişleri aynı periyot içerisinde teslim ettiği, OPT'ye verilen siparişlerin ise pozitif bir termin süresinin ardından teslim edildiği varsayılmıştır. Yedek parça talepleri öncelikle eğer stokta parça var ise stoktan karşılanmaktadır. Eğer envantere yeterli parça mevcut değil ise talep bir sonraki periyotta karşılanmak üzere bekletilmektedir.

Her bir periyotta gerçekleşen olaylar sırayla aşağıdaki gibidir:

- Daha önceki periyotlarda OPT'ye siparişi verilen parçalardan zamanı gelenler teslim edilir.
- Eldeki envanter gözlenir ve ardından OPT'ye ve ikincil marketlere ilgili siparişler iletilir.
- İkincil marketlere verilen siparişler teslim alınır.
- Rassal talep gerçekleşir.
- Sipariş, elde tutma ve talebi karşılayamama maliyetleri hesaplanır ve ardından belirli bir indirgeme oranıyla toplam maliyete eklenir.

İkincil marketlerden toplam satın alma maliyeti bir önceki bölümdeki ile aynı şekilde hesaplanmaktadır: $c(q, K) = c_0 q^\xi K^\eta$, $\eta < 0$, $\xi \geq 1$. Bu maliyet fonksiyonu sayesinde ikincil marketlerden parça satın alma maliyeti ile marketteki parça sayısı ve verilen siparişin miktarı arasındaki bağımlılık modele yansıtılmıştır.

Matematiksel model öncelikle genel bir termin süresi için elde edilmiştir. Daha sonra özel bir durum olan termin süresinin bir olduğu, $lt = 1$, durum ele alınmıştır. Öncelikle tek periyot için maliyet fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$V(K, y) = \min_{\substack{q^r \geq 0, \\ K \geq q^s \geq 0}} \{c^r q^r + c(q^s, K) + L(y + q^s)\}.$$

Burada K ikincil marketlerin karar periyodundaki kapasitesini, y eldeki envanteri, c^r OPT'nin sipariş maliyetini, q^r OPT'ye verilen siparişin miktarını, q^s ikincil marketlere verilen siparişin miktarını ve $c(q^s, K)$ ikincil marketlerden toplam satın alma maliyetini temsil etmektedir. $L(y) := E[h(y - D)^+ + b(D - y)^+]$ ise bir periyot için elde tutma ve talebi karşılayamama maliyetinin beklenen değerini vermektedir, öyle ki $x^+ = \max(0, x)$. Ayrıca h birim başına elde tutma maliyeti ve b birim başına talebi karşılayamama maliyetidir. $L(y)$ fonksiyonunun dışbükey olduğu envanter kontrol literatüründe bilinmektedir. Çok periyotlu planlama ufku için maliyet fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$V_t(K_t, \bar{\mathbf{q}}_t^r, y_t) = \min_{\substack{q_t^r \geq 0, \\ K \geq q_t^s \geq 0}} \{J_t(K_t, \bar{\mathbf{q}}_t^r, y_t, q_t^r, q_t^s)\}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T,$$

$$J_t(K_t, \bar{\mathbf{q}}_t^r, y_t, q_t^r, q_t^s) = c^r q^r + c(q_t^s, K_t) + L(y_t + q_t^s) + \alpha E[V_{t+1}(K_+, \bar{\mathbf{q}}_{t+1}^r, y_t + q_{t-lt+1}^r + q_t^s - D_t)].$$

$\bar{\mathbf{q}}_t^r$, $lt - 1$ boyutlu yoldaki siparişler vektörüdür, öyle ki $\bar{\mathbf{q}}_t^r = (q_{t-lt+1}^r, q_{t-lt+2}^r, \dots, q_{t-1}^r)$. α her bir periyotta uygulanan indirgeme oranını ve K_+ de takip eden periyotta ikincil marketlerin kapasitesini temsil eden rassal değişkendir. D_t ise durağan olmayan talebi temsil etmektedir. Sonlu ufuklu dinamik minimizasyon problemi $lt + 1$ boyutlu $(K, y, \bar{\mathbf{q}}_t^r) \in (\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ durum uzayının üzerinde tanımlanmaktadır. Durum uzayının ilk değişkeni bir periyottaki market kapasitesini, ikinci değişkeni eldeki envanteri ve üçüncü değişken de yoldaki siparişleri temsil etmektedir.

OPT'nin termin süresi 1'e eşit olduğunda çok periyotlu planlama ufku için maliyet fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$V_t(K_t, y_t) = \min_{\substack{q_t^r \geq 0, \\ K_t \geq q_t^s \geq 0}} \{J_t(K_t, y_t, q_t^r, q_t^s)\}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T, \quad (18)$$

$$J_t(K_t, y_t, q_t^r, q_t^s) = c^r q_t^r + c(q_t^s, K_t) + L(y_t + q_t^s) + \alpha E[V_{t+1}(K_+, y_t + q_t^r + q_t^s - D_t)]. \quad (19)$$

Bu durumda sonlu ufuklu dinamik minimizasyon problemi $l - 1$ boyutlu $(K, y) \in (\Omega \times \mathbf{R})$ durum uzayının üzerinde tanımlanmaktadır. Durum uzayının ilk elemanı ikincil marketin marketin kapasitesini temsil ederken ikinci elemanı eldeki envanteri temsil etmektedir.

Önerme 3.1.1: Durağan olmayan talep ve $lt = 1$ varsayımları altında, Denklem 1 ve 2'de verilen çok periyotlu, sonlu ufuklu indirgenmiş toplam maliyet fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- Verilen K_t ve y_t değerleri için $J_t(K_t, y_t, q_t^r, q_t^s)$ fonksiyonu (q_t^r, q_t^s) 'de konvektir.
- Verilen bir K_t için $V_t(K_t, y_t)$ fonksiyonu y_t 'de konvektir.
- Optimum kontrol bir eşik değer politikası ile sağlanmaktadır.

İspat:

Bu önermenin ispatı tümevarım yöntemiyle gerçekleştirilecektir. Başlangıç olarak $t = T$ için $J_T(K_T, y_T, q_T^r, q_T^s)$ fonksiyonu q_T^r 'de doğrusal olarak artmaktadır. $c(q_t^s, K_t)$ ve $L(y_t + q_t^s)$ fonksiyonları parametrelerinde konveks oldukları için $J_T(K_T, y_T, q_T^r, q_T^s)$ fonksiyonu (y_T, q_T^r, q_T^s) 'de konvektir. Konveksite minimizasyonda korunduğu için $V_T(K_T, y_T)$, y 'de konveks bir fonksiyondur. T periyodu için optimum bir q^r ve q^s değeri vardır. Dolayısıyla tümevarım $t = T$ için tamamlanmıştır. Önermede a , b ve c ifadelerinin $t + 1$ için doğru olduğu varsayalım. Periyod t için, $c(q_t^s, K)$ ve $L(y_t + q_t^s)$ konveks fonksiyonlar ve $E[V_{t+1}(K_+, y_t + q_t^s - D_t)]$ konveks olduğu için $J_t(K_t, y_t, q_t^r, q_t^s)$

(y_t, q_t^r, q_t^s) 'de konvekstir. $J_t(K_t, y_t, q_t^r, q_t^s)$ 'in (q_t^r, q_t^s) üzerinden minimizasyonu sonucu $V_t(K_t, y_t)$ verilen bir K için y 'de konvekstir. Dolayısıyla a ve b ifadeleri ispatlanmıştır. b ifadesi c 'yi ispatlar.

Denklem 18 ve 19'da verilen matematiksel modeli kullanarak $lt = 1$ için optimum politikanın yapısını ispatlamak için ilk olarak aşağıdaki değişken dönüşümünü yapmak gereklidir:

$$\begin{aligned} w &= y + q^s, \\ v &= w + q^r. \end{aligned}$$

Buradan hareketle Denklem 18 ve 19'da verilen model aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{V}_t(K_t, y_t) = \min_{\substack{v \geq w, \\ K_t + y \geq w \geq y}} \{ \tilde{J}_t(K_t, y_t, v, w) \}, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T, \quad (20)$$

$$\tilde{J}_t(K_t, y_t, v, w) = c^r(v - w) + c_0(w - y)^\xi K_t^\eta + L(w) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]. \quad (21)$$

Son periyot için Denklem 21 aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tilde{J}_T(K, y, v, w) = c^r(v - w) + c_0(w - y)^\xi K^\eta + L(w). \quad (22)$$

Bu bölümde de durağan talep modeline benzer şekilde analitik çalışmalarda öncelikle $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ olarak varsayılacak, bu parametrelerin genel değerleri için optimum politikanın yapısı ve maliyet fonksiyonunun alacağı değer nümerik olarak analiz edilecektir. $\xi = 1$ ve $\eta = 0$ için Denklem 20,

$$\tilde{V}_t(K_t, y_t) = \min_{\substack{v \geq w, \\ K_t + y \geq w \geq y}} \{ c^r(v - y) + c_0(v - w) + L(w) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)] \}, \quad (23)$$

olarak ifade edilebilir. $-c^r + c_0 = c$ olarak tanımlanırsa Denklem 23'teki model,

$$\tilde{V}_t(K_t, y_t) = \min_{\substack{v \geq w, \\ K_t + y \geq w \geq y}} \{ c^r(v - y) + c(w - y) + L(w) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)] \}, \quad (24)$$

olarak ifade edilebilir. Minimizasyonun içindeki üçüncü ve dördüncü terimler kullanılarak,

$$\tilde{L}(K_t, y_t) = \min_{K_t + y \geq w \geq y} \{ c(w - y) + L(w) \}, \quad (25)$$

tanımlanır. Denklem 25'teki matematiksel modelin kısıtsız halini minimize eden değer w^* olarak ifade edilir. Buradan hareketle optimum fonksiyon aşağıdaki önerme ile karakterize edilebilir. Bu önermenin ispatı için Fukuda (1964) tarafından geliştirilen yöntemin hızlı tedarikçinin sınır kapasite sahip olduğu duruma uyarlanması gerçekleştirilmiştir.

Önerme 3.1.2: Denklem 18 ve 19'daki matematiksel modeli minimize eden optimum politika, bir periyottaki market kapasitesinin fonksiyonu olan iki adet parametre, $v^*(K)$ ve $w^*(K) = (w^* \vee (y + K)) \wedge y$, ile ifade edilebilir: $q_t^s = (w_t^*(K) - y_t)$ ve $q_t^r = v_t^*(K) - w_t^*(K)$.

İspat:

Denklem 21'de verilen fonksiyonun optimizasyonu için $\tilde{L}(K, y)$ 'i minimize eden nokta olan w^* 'in $[y, y + K]$ aralığının neresine düştüğü incelenecektir. Öyle ki eğer $w^* < y < y + K$ ise $\tilde{L}(K, y) = L(y)$ eşit olacaktır. Bu durumda Denklem 24'teki minimizasyon

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq y} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (26)$$

olarak bulunur. Eğer $y < w^* < y + K$ ise $\tilde{L}(K, y) = c(w^* - y) + L(w^*)$ eşit olarak bulunur. Denklem 24'teki minimizasyonda $v > w^*$ için

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq w^*} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (27)$$

olarak ifade edilir. $v^* \leq w^*$ için

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{w^* \geq v \geq y} \{c^r(v - y) + c(v - y) + L(v) - \tilde{L}(K, y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (28)$$

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{w^* \geq v \geq y} \{c^r(v - y) + c(v - w^*) + L(v) - L(w^*) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (29)$$

bulunur. Eğer $y + K < w^*$ ise $\tilde{L}(K, y) = c(K) + L(y + K)$. Bu durumda $v > w^* > y + K$ veya $w^* > v > y + K$ ise Denklem 24'teki minimizasyon

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq y+K} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (30)$$

$$\tilde{V}_t(K, y) = cK + L(y + K) + \min_{v \geq y+K} \{c^r(v - y) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}, \quad (31)$$

olarak bulunur. $w^* > y + K > v \geq y$ ise

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(K, y) &= cK + L(y + K) \\ &+ \min_{v \geq y+K} \{c^r(v - y) + c(v - y - K) + L(v) - L(y + K) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}. \end{aligned}$$

Denklem 8-14'ü tek bir modelde toplamak için $z = \min(y + K, w^*)$ ve

$$\Lambda(v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } v \geq z \\ L(v) - L(z) + c(v - z), & \text{eğer } v < z, \end{cases}$$

tanımlanır. $\Lambda(v)$ fonksiyonu sürekli ve konveks olduğu için Denklem 25-31'de verilen eşitlikler

$$\tilde{V}_t(K, y) = \tilde{L}(K, y) + \min_{v \geq y} \{c^r(v - y) + \Lambda(v) + \alpha E[\tilde{V}_{t+1}(K_+, v - D_t)]\}$$

ile ifade edilir. Buradan hareketle Denklem 15'deki minimizasyonun optimum değeri v^* olarak tanımlanırsa optimum politika şu şekilde karakterize edilir: Eğer $v^* > z$ 'se $q_t^r = (v^* - z)$ ve $q_t^s = z - y$; eğer $v^* \leq z$ ve $w^* > y$ ise $q_t^r = 0$ ve $q_t^s = z - y$; eğer $v^* \leq z$ ve $w^* \leq y$ $q_t^r = 0$ ve $q_t^s = 0$ olur. Önerme 3.1.2'de analitik karakterizasyonu verilen optimum kontrol politikası, herhangi bir periyotta ikincil markette gözlemlenen parça sayısına bağlı baz stok seviyelerinden (*order-up-to levels*) oluşmaktadır.

3.1.1. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Arttığı Ürünler için Satın Alma Politikasının Araştırılması

Bir önceki bölümde de bahsedildiği gibi termin süresinin 1'e eşit olduğu durumda optimum envanter kontrol politikası önerme 3.1.2'de verilmiştir. Ancak termin süresinin 1'den büyük olduğu durumlarda optimum politika durum değişkenlerine göre değişmektedir. Bu bölüm kapsamında büyüyen kurulu sistemler için bir optimizasyon modeli geliştirilmiş ve değer öteme algoritması kullanılarak bu modelin çözümü gerçekleştirilmiştir.

Bu kapsamda durağan olmayan talebin modellemesi için büyüyen kurulu sistemler için geliştirilen talep seçim algoritması kullanılmıştır. Bu amaçla öncelikle Bölüm 1'de geliştirilen moment fonksiyonları kodlanmış ardından hesaplanan momentlere göre talep seçim algoritması üzerinden ilgili periyodun talep dağılımı belirlenmiştir. Daha sonra belirlenen talep dağılımlarının parametreleri hesaplanan momentler üzerinden tahmin edilmiştir. Çözümü gerçekleştirilen optimizasyon modellerinde kullanılan parametreler aşağıdaki gibidir.

Tablo 7: Artan Kurulu Sistemler için Sayısal Deneylerde Kullanılan Problem Parametreleri

Planlama Ufku	b	h	Sermaye Mali Satış Oranı (λ)	Sermaye Mali Bozulma Oranı(α)	l^r	Market Senaryosu	c^r	η	ξ	İndirgeme Faktörü	Strateji
60	15	5	Poisson (0,05)	Poisson (0,05)	1	1	5	0	1	0,99	1
	95	1	Poisson (0,25)	Poisson (0,25)	2	2		-0,9	1,1		2
					3	3		-0,1	2		

Tablo 7'de optimizasyon modellerinde kullanılan problem parametreleri verilmiştir. Bu parametrelerden b birim başına uygulanacak elde tutma maliyetini, h birim başına uygulanacak talebi karşılayamama maliyetini temsil etmektedir. Bu bölüm kapsamında Bölüm 1'de olduğu gibi sermaye mali satışlarının ve sermaye mallarının bozulmalarının bağımsız birer Poisson süreci olduğu kabul edilmiştir. Bu süreçlerin Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla λ ve α ile gösterilmiştir. l^r OPT'nin termin süresini göstermekte, c^r ise OPT'den alınan birim başına parça maliyetini temsil etmektedir. η ve ξ değerleri ise ikincil marketlerin satın alma maliyetini veren fonksiyonun ($c(q, K) = c_0 q^\xi K^\eta$) parametreleridir. Bu fonksiyondaki c_0 değerinin ise c^r 'ye eşit olduğu kabul edilmiştir.

Bu bölümde gerçekleştirilen sayısal deneylerde Tablo 7'de verilen parametrelerden oluşan uzayın bir alt uzayı kullanılmıştır. Bölüm 2'deki sayısal deneylere benzer olarak literatürde sıkça kullanılan ikincil marketler için doğrusal satın alma fonksiyonunu temsil etmesi için $\eta = 0$ ve $\xi = 1$

değerleri proje önerisinde verilen parametrelere eklenmiştir. Böylece sezgisellerin ikincil marketten satın alma maliyetinin doğrusal ve doğrusal olmayan olduğu durumlardaki performanslarının karşılaştırılması amaçlanmıştır. Ayrıca Tablo 7'de görüldüğü üzere ξ 'nin maksimum değeri 5 yerine 2 olarak alınmıştır. Bunun sebebi talep ve dolayısıyla ikincil marketlere verilen sipariş miktarı arttığından maliyet fonksiyonunun aşırı büyümesini önlemek ve daha gerçekçi olmasını sağlamaktır. Bu bölüm kapsamında gerçekleştirilen sayısal deneylerde λ ve α değerlerinin 0.25 olduğu durum değerlendirilmeye alınmamıştır. Bunun nedeni durum uzayının çok büyümesi sonucunda optimizasyon modelinin çözümünün teknolojik olarak mümkün olmamasıdır. Optimizasyon modelinin çözümünün teknolojik olarak mümkün olmamasına neden olan bir diğer faktör ise talep bu parametreler için talep miktarının çok büyümesidir. Değer öteleme algoritması gereği durum uzayının her bir üyesi için kapasite ve talep miktarları için ayrı ayrı beklenen değer hesaplanması gerekmektedir. Durum uzayının ve talebin aşırı büyümesi çözümü teknolojik olarak mümkün olmaktan çıkarmaktadır. Aynı sebeple geriye kalan parametreler için planlama ufku 60 periyot olarak belirlenmiş ve 120, 360, 600 ve 1800 değerleri kullanılmamıştır. Bu değerlerin kullanıldıkları durumda durum uzayı aşırı büyümekte ve çözüm için kullanılan bilgisayar ve sunucuların belleği yetersiz kalmaktadır. Tablo 8-Tablo 10'da λ , α ve planlama ufku parametrelerine göre durum uzayının toplam boyutları verilmiştir.

Tablo 8: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.05$ $\alpha = 0.05$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	425.919	1.824.459	18.756.023	56.778.800	663.765.323
lt=2	2.269.813	12.026.833	171.752.763	632.363.706	12.360.942.919
lt=3	12.189.762	80.259.582	1.603.027.062	7.216.196.351	238.075.978.634

Tablo 9: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.25$ $\alpha = 0.05$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	503.776	2.265.406	26.546.689	87.172.501	1.266.317.000
lt=2	4.314.063	25.101.843	493.580.334	2.159.372.059	64.205.930.000
lt=3	37.465.792	283.966.527	9.477.465.816	55.537.489.761	3.413.736.000.000

Tablo 10: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.05$ $\alpha = 0.25$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	586.820	2.617.706	30.079.023	97.579.820	1.377.237.000
lt=2	6.289.296	35.420.931	642.280.054	2.707.524.547	74.900.710.000
lt=3	67.737.540	486.689.099	14.083.844.398	77.612.117.037	4.257.209.000.000

Tablo 11: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Artan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.25$ $\alpha = 0.25$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	793.754	3.905.265	55.142.997	200.395.400	3.643.751.000
lt=2	15.384.278	107.749.837	2.991.335.867	15.609.830.000	671.755.800.000
lt=3	303.264.936	3.057.637.245	169.294.407.308	1.275.114.000.000	130.814.400.000.000

Optimizasyon modellerinin çözümünde durum uzayının boyutunu küçültmek için OPT'nin kapasitesi üzerine yapay bir üst limit koyulmuş ve bu limit ilgili periyotta gelebilecek talebin 1,5 katı olarak belirlenmiştir. İkincil marketlerin maksimum kapasitesi ise 12 olarak belirlenmiştir. Daha önce de belirtildiği üzere ikincil marketlerdeki parça sayısının rassal olduğu ve kesikli bir Markov zinciri takip ettiği varsayılmıştır. Bu Markov zincirinin üzerinde tanımlandığı sonlu ve sayılabilir uzay ise $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ olarak tanımlanmıştır. Tablo 7'de de belirtildiği üzere büyüyen kurulu sistemlerin sayısal deneylerinde market senaryosu 1, 2 ve 3 değerlendirilmeye alınmıştır. Bu senaryolar sırasıyla simetrik, rassal olarak artan ve rassal olarak azalan olasılık geçiş matrislerini temsil etmektedir. Yine bu senaryolara ait Markov geçiş olasılıkları matrisleri sırasıyla P_1 , P_2 ve P_3 olarak aşağıda verilmiştir:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0,5 & 0,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Son olarak durağan ve durağan olamayan talep arasındaki farkın anlaşılabilmesi için aşağıdaki iki strateji geliştirilmiştir:

- Strateji 1: Talep dağılımlarının tamamını Negatif Binom olarak kabul eden.
- Strateji 2: Talep dağılımlarını Ord (1967)'nin geometrik dağılım sınıflarına göre seçen.

3.1.2. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Azaldığı Ürünler için Satın Alma Politikasının Araştırılması

Bu bölümde azalan kurulu sistemler için bir optimizasyon modeli geliştirilmiştir ve değer öteleme algoritması ile bu modelin çözümü gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda durağan olmayan talebin modellenmesi için azalan kurulu sistemler için geliştirilen talep seçim algoritması kullanılmıştır. Bu amaçla öncelikle Bölüm 1’de geliştirilen moment fonksiyonları kodlanmış ardından hesaplanan momentlere göre talep seçim algoritması üzerinden ilgili periyodun talep dağılımı belirlenmiştir. Daha sonra belirlenen talep dağılımlarının parametreleri hesaplanan momentler üzerinden tahmin edilmiştir. Çözümü gerçekleştirilen optimizasyon modellerinde kullanılan parametreler aşağıdaki gibidir.

Tablo 12: Azalan Kurulu Sistemler için Sayısal Deneylerde Kullanılan Problem Parametreleri

Planlama Ufku	b	h	Sermaye Mali Ölüm Oranı (λ)	Sermaye Mali Bozulma Oranı(α)	l^r	Market Senaryosu	c^r	η	ξ	İndirgeme Faktörü	Strateji
60	15	5	Poisson (0,05)	Poisson (0,05)	1	1	5	0	1	0,99	1
	95	1	Poisson (0,25)	Poisson (0,25)	2	2		-0,9	1,1		2
					3			-0,1	2		

Bu bölüm kapsamında gerçekleştirilen sayısal deneylerde Tablo 12’de verilen problem parametrelerinin oluşturduğu uzayın bir alt uzayı kullanılmıştır. Bu parametrelerden b birim başına uygulanacak elde tutma maliyetini, h birim başına uygulanacak talebi karşılayamama maliyetini temsil etmektedir. Bu bölüm kapsamında Bölüm 1’de olduğu gibi sermaye malı satışlarının ve sermaye mallarının bozulmalarının bağımsız birer Poisson süreci olduğu kabul edilmiştir. Bu süreçlerin Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla λ ve α ile gösterilmiştir. l^r OPT’nin termin süresini göstermekte, c^r ise OPT’den alınan birim başına parça maliyetini temsil etmektedir. η ve ξ değerleri ise ikincil marketlerin satın alma maliyetini veren fonksiyonun ($c(q, K) = c_0 q^\xi K^\eta$) parametreleridir. Bu fonksiyondaki c_0 değerinin ise c^r ’ye eşit olduğu kabul edilmiştir.

Bu bölüm kapsamındaki sayısal deneylerde $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.25$ olduğu durum değerlendirilmeye alınmamıştır. Bunun sebebi Bölüm 3.1.1’de olduğu gibi durum uzayının aşırı büyümesidir. Benzer şekilde, geriye kalan parametreler için planlama ufku 60 periyot olarak belirlenmiş ve 120, 360, 600 ve 1800 değerleri kullanılmamıştır. Bu değerlerin kullanıldıkları durumda durum uzayı aşırı büyümekte ve çözüm için kullanılan bilgisayar ve sunucuların belleği yetersiz kalmaktadır. Tablo 13-Tablo 16’da λ , α ve planlama ufku parametrelerine göre durum uzayının toplam boyutları verilmiştir.

Tablo 13: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.05$ $\alpha = 0.05$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	533.754	2.103.114	17.734.132	44.799.976	315.366.376
lt=2	3.772.509	14.725.269	85.123.116	120.578.796	391.145.196
lt=3	26.742.274	103.182.274	441.386.361	493.727.117	764.293.517

Tablo 14: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.05$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.25$ $\alpha = 0.05$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	494.520	1.772.680	12.549.160	32.311.240	265.905.640
lt=2	2.607.046	4.726.150	15.502.630	35.264.710	268.859.110
lt=3	14.501.513	19.291.467	30.067.947	49.830.027	283.424.427

Tablo 15: $\lambda = 0.05$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.05$ $\alpha = 0.25$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	844.740	3.300.778	27.274.858	66.523.535	399.209.135
lt=2	12.446.317	44.961.111	275.614.131	361.155.132	693.840.732
lt=3	184.524.925	616.938.270	2.986.782.240	3.259.442.485	3.592.128.085

Tablo 16: $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.25$ Değeri için Durum Uzayının Toplam Boyutları - Azalan Kurulu Sistemler

$\lambda = 0.25$ $\alpha = 0.25$	Planlama ufku=60	Planlama ufku=120	Planlama ufku=360	Planlama ufku=600	Planlama ufku=1800
lt=1	764.127	2.629.549	15.858.349	38.072.749	283.928.749
lt=2	8.587.683	14.113.840	27.342.640	49.557.040	295.413.040
lt=3	100.240.855	126.599.369	139.828.169	162.042.569	407.898.569

Optimizasyon modellerinin çözümünde durum uzayının boyutunu küçültmek için OPT'nin kapasitesi üzerine yapay bir üst limit koyulmuş ve bu limit ilgili periyotta gelebilecek talebin 1,5 katı olarak belirlenmiştir. İkincil marketlerin maksimum kapasitesi ise 12 olarak belirlenmiştir. Daha önce de belirtildiği üzere ikincil marketlerdeki parça sayısının rassal olduğu ve kesikli bir Markov zinciri takip ettiği varsayılmıştır. Bu Markov zincirinin üzerinde tanımlandığı sonlu ve sayılabilir uzay $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ olarak tanımlanmıştır. Tablo 12'de de belirtildiği üzere büyüyen kurulu sistemlerin sayısal deneylerinde market senaryosu 1 ve 2 değerlendirilmeye alınmıştır. Bu senaryolar sırasıyla simetrik ve rassal olarak artan olasılık geçiş matrislerini temsil etmektedir. Bu iki senaryo için sırasıyla Bölüm 3.1.1'de verilen P_1 ve P_2 Markov olasılık geçiş matrisleri kullanılmıştır. Tablo 12'de belirtilen stratejiler için de Bölüm 3.1.1'de verilen stratejiler kullanılmıştır. Son olarak yapılan sayısal deneylerde, planlama ufkunun başındaki sermaye malı sayısını temsil eden N_0 değeri 10 olarak alınmıştır.

3.2. Kurulu Sistemin Büyüme ve Azalış Dönemlerinde Ürünler Sayısı ve İkincil Marketler Arasındaki İlişkinin Araştırılması

Yedek parça tedarik zincirlerinde, ikincil marketler bakım hizmeti yürüten firmaların birbirleri arasında parça alışverişinde bulunduğu çevrimiçi platformlarına verilen genel isimdir. Özellikle dayanıklı sermaye malları için ikincil marketler, internet teknolojisinin de gelişmesiyle birlikte giderek daha sık kullanılan bir tedarik kaynağı olarak kabul edilmektedir (Hekimoğlu, 2015). Şirketler, orijinal parça üreticilerine göre genellikle daha ucuz ve daha hızlı oldukları için yedek parça ihtiyaçlarının bir kısmını ikincil pazarlardan temin etmektedir.

İkincil marketlere parça girişi çeşitli faktörlerden etkilenmektedir. Çeşitli çalışmalar, sermaye mallarının kullanımdan çıkarılmama veya başkasına satılma durumlarında, yedek parça envanterlerinin ikincil piyasalarda satıldığını raporlamaktadırlar. Bu parçalara yedek parça fazlası (*surplus inventory*) adı verilir ve bu fazla yedek parçalar ikincil pazarlarda bulunan yedek

parçaların önemli bir bölümünü oluşturmaktadır. Parça fazlasının ortaya çıkmasının bir başka ihtimali de bir sermaye malı için kiralama sözleşmesinin sona ermesidir. Genellikle bir sermaye malı için kiralama sözleşmesi sona erdiğinde kullanıcı yedek parça envanterini ikincil piyasaya satmayı tercih edebilir (Li vd., 2004; Kleber vd., 2020). Benzer şekilde, kullanımdan çıkarılmış sermaye mallarının parçalarına ayrılması da ikincil marketlerde parça satışına yol açabilmektedir (Sherbrooke, 2006). Bu aktiviteye genel olarak kanibalizasyon (*cannibalization*) adı verilmektedir. Bu faktörler nedeniyle, ikincil pazarlardaki parça bulunabilirliği sermaye ürünlerinin emekliye ayrılmasıyla (kullanımdan çıkarılmasıyla) önemli ölçüde artış göstermektedir.

İkincil marketlere yedek parça girişi ve ikincil marketlerden yedek parça çıkışı ile kurulu sistem dinamikleri arasındaki ilişki, kurulu sistem bilgisini kullanarak sermaye mallarının yaşam döngülerinin farklı aşamalarında parça bulunabilirliği üzerine yapılan çalışmaların çıkış noktasını oluşturmaktadır. Bu bölümde, sırasıyla artan ve azalan kurulu sistem senaryoları arasındaki ilişki analiz edilmiştir. İkincil piyasada parçaların zamana bağlı bulunabilirliği için analitik formülasyonlar çok karmaşık olduğundan, aşağıda sayısal deneylerle test edilen yaklaşık formülasyonlar verilmiştir.

3.2.1. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Arttığı Ürünler için İkincil Marketlerdeki Parça Sayısı

İkincil piyasalara parça girişlerinin sayısının modellenmesi için, Bölüm 1.1'deki büyüyen kurulu sistem modeline sermaye ürünlerinin kullanımdan çıkarılmasının da eklenmesi gereklidir. Öyle ki, sermaye mallarının kullanıma alınması λ parametresine sahip bir Poisson sürecine göre gerçekleşsin ve her bir ürünün yaşamı boyunca gereken yedek parça talebi α parametresine sahip bir Poisson süreci izliyor olsun. W_{i-1} zamanında devreye alınan sermaye ürünü i 'nin kullanımdan çıkarılma sürecini modellemek için γ parametrelili bir başka Poisson süreci varsayılmıştır. Kullanıma girişi ve kullanımında çıkışı modelleyen Poisson süreçlerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılmıştır. Sermaye malları yaşam döngülerinin büyüme aşamasında olduğundan mal sahibinin aynı sermaye malını eski ürünün kullanımdan kaldırılmasının hemen ardından OPT'den satın aldığı varsayılmıştır. Dolayısıyla, sermaye ürünlerinin emeklilikleri yedek parça talebi ile aynı süreçle modellenir ve toplam emeklilik sayısı Önerme 1.1.3'deki gibi S_t ile ifade edilir. Emekliye ayrılan her bir sermaye malının ardından L ile gösterilen sabit sayıda yedek parça fazlasının ikincil markete giriş yaptığı ve yedek parça talebinin $(1 - \eta)$ kadarının ikincil marketlerden karşılandığı (bu anlamda kullanıldığından emin değilim) varsayılmıştır. Bu problem kurulumunda, I_t ile gösterilen ikincil pazarlardaki toplam yedek parça miktarını şu şekilde ifade edilebilir:

$$I_t = \left(I_{t-1} + LD_{t-1, \Delta t}^\gamma - D_{t-1, \Delta t}^{\alpha(1-\eta)} \right)^+, \quad (5.1)$$

öyle ki I_0 bir sermaye ürününün ilk defa kullanıma alınması sırasında ikincil piyasada bulunan yedek parçaların toplam miktarıdır. Eşitlik (5.1)'deki ifadenin beklenen değerini analiz etmek talep oluşumunun ve yedek parçaların kullanımdan çıkarılma süreçlerinin bağımlılığı nedeniyle zordur. Bu zorluk temel olarak, iki işlemin ortak başlangıç zamanının ortak olmasından kaynaklanmaktadır. Bazı cebirsel manipülasyonlar kullanılarak (5.1) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$I_t = I_0 + LS_t^\gamma - S_t^{\alpha(1-\eta)} + \left\{ \left[\left(-I_0 - LS_1^\gamma + S_1^{\alpha(1-\eta)} \right)^+ \vee \left(-I_0 - LS_2^\gamma + S_2^{\alpha(1-\eta)} \right) \right] \vee \dots \vee \left(-I_0 - LS_t^\gamma + S_t^{\alpha(1-\eta)} \right) \right\}. \quad (5.2)$$

(5.2)'deki denklemde eğer L yeterince büyükse, $I_0 - LS_t^\gamma - S_t^{\alpha(1-\eta)}$ ifadesi t cinsinden stokastik olarak artacak ve $t = 1$ için pozitif olacaktır. Bu nedenle (5.1) yaklaşık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir

$$I_t^{approx} = I_0 + LS_t^\gamma - S_t^{\alpha(1-\eta)}.$$

Belirli bir yaklaşım kalitesini garanti eden L 'nin değeri, T 'nin üstel(γ) bir dağılım izlediği ve Z_t 'nin $Poisson(\alpha(1-\eta)t)$ dağılımına sahip olduğu Z_T değeri kullanılarak belirlenebilir. Z_T , bir sermaye malının kullanım ömrü boyunca ikincil pazarlara yöneltilen yedek parça talebi miktarı olarak yorumlanabilir. Zipkin (2000, Bölüm 7, §7.5), $T \sim Gamma(\gamma, n)$ ise T süresi içinde gerçekleşen $Poisson(\alpha)$ gelişlerini n ve p parametrelerine sahip bir Negatif Binom dağılımı izler öyle ki $\alpha =$

$\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$. Bu ilişkiye dayanarak $L_\epsilon := \min \left\{ L \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^L \frac{\gamma(\alpha(1-\eta))^k}{(\gamma+\alpha(1-\eta))^{k+1}} \right\}$ tanımlaması yapılabilir. L_ϵ

sermaye malının ömrü boyunca ikincil piyasalardan alınan yedek parça miktarından daha fazla olan stok fazlası olarak yorumlanabilir. Bu nedenle L 'nin L_ϵ 'dan büyük ya da eşit olması her bir sermaye malı için yapılan yedek parça alımına kıyasla ikincil marketlere satılan yedek parça envanterinin daha fazla olacağına garanti eder. Doğal olarak L_ϵ , ϵ 'da artandır.

Önerme 1.1.3'in ilk ifadesini kullanılarak, kurulu sistemin stokastik büyümesi sırasında ikincil piyasadaki yedek parça miktarının beklenen değerini şu şekilde hesaplanabilir:

$$\mathbb{E}(I_t^{approx}) := (L\gamma_t - \alpha_t(1-\eta)) \left(\frac{1}{2}\lambda_t + 1 \right),$$

öyle ki $\gamma_t = \gamma t$. Benzer şekilde, ikincil piyasadaki parça sayısının varyansı, -terimlerin kovaryansını göz ardı ettiği için- toplam varyansı olduğundan az tahmin eden S_t^γ ve $S_t^{\alpha(1-\eta)}$ 'in varyanslarının toplamı ile yaklaşık olarak tahmin edilebilir.

Ayrıca belirtmek gerekirse burada önerilen matematiksel model OPT'lerin yeniden üretim sürecinden geçirilmiş parçalarının tedarik edilebilirliği için de kullanılabilir. λ oranıyla kurulumlarının ardından sermaye malları γ oranı ile OPT'ye iade edilir ve müşteri talebini $\alpha(1 - \eta)$ oranı ile karşılayan bir yeniden üretim sürecinde kullanılır. Atasu vd. (2010), yeniden imalatta kullanılan bileşenlerin tedarik mevcudiyeti ile yeni ürünlerin satışı arasındaki bağımlılığı kabul etmektedir. Bir OPT'nin yeniden üretime başlama ya da yaşam döngüsünün büyüme aşamasında bir ürün için hiçbir şey yapmama kararlarından birini vermesi gerektiğini açıklamaktadırlar. Bu açıklamaya göre, L yeterince büyükse, yeniden üretime başlama kararı için en uygun zaman $t^r = \frac{c^I}{p^r} \frac{1}{\alpha(1-\eta)\lambda\Delta t} \frac{\Delta t}{2\lambda}$ ifadesine eşittir ve burada c^I yeniden üretim için gereken yatırım maliyeti, c^I yeniden üretilmiş ürünün kâr marjıdır. Bu sonuç yeterli miktarda iade edilen ürün için geçerlidir, daha düşük kâr marjı yeniden imalatın daha geç başlaması ve üçüncü parti üreticilerle daha yüksek rekabet riski anlamına gelmektedir (Atasu ve diğerleri, 2010; Ferguson ve Toktay, 2006).

3.2.2. Kurulu Sistem Büyüklüğünün Azaldığı Ürünler için İkincil Marketlerdeki Parça Sayısı

Kurulu sistemin büyüklüğünün azaldığı durumda, kullanımdan çıkarılan sermaye ürünlerinden elde edilen yedek parça fazlası piyasadaki bulunabilirliği artırırken, toplam yedek parça talebi zamanla azalmaktadır. Ek olarak, yedek parça üreticilerinin kârlılığın azalması nedeniyle belirli parça türleri için üretimi sonlandırmaları nedeniyle tedarik kesintileri meydana gelebilir. Herhangi bir kesinti olmasa bile, teslimat süresindeki dalgalanmalar veya eksik teslimatlar bakım sağlayan firmaların parçaya ulaşılabilirliğini önemli ölçüde sekteye uğratabilmektedir (Li vd., 2016; Hekimoğlu vd., 2018). Bu problemde ikincil marketler, yüksek parça bulunabilirliğine sahip hızlı bir tedarik kaynağı olarak önemli bir rol oynamaktadır.

İkincil piyasalardaki parça bulunabilirliği ile kurulu sistemin büyüklüğü arasındaki ilişkiyi modellemek için Bölüm 1.2'de açıklanan stokastik süreç kullanılmıştır. Planlama ufkunun başlangıcında N_0 adet sermaye malının mevcut olduğunu ve N_t ile gösterilen yedek parça kullanımdan çıkarma işlemlerinin λ parametrelili bir Poisson sürecine izlediğini varsayarsak ikincil pazarlara sunulan toplam parça sayısı LN_t ile ifade edilebilir. Her bir sermaye malı için yedek parça siparişleri η olasılıkla OPT'ye verilir veya talep ikincil marketten karşılanır. Öyleyse ikincil piyasadan alınan toplam yedek parça talebi miktarı $S_t^{D(\alpha(1-\eta))}$ ile ifade edilirken, ikincil pazardaki yedek parça miktarı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$I_t = \left(I_{t-1} + L\Delta N_t - D_{t-1,\Delta t}^{\alpha(1-\eta)} \right)^+, \quad (5.4)$$

burada $I_0, 0$ ve $\Delta N_t := N_{t+\Delta t} - N_t$ anında ikincil pazarlarda bulunan yedek parçaların sayısını gösterir. Büyüyen kurulu temel sistemlerden farklı olarak, sermaye ürünlerinin ölümleri için ilgili rassal değişken olan N_t mevcut olduğundan, (5.4)'ün analizi için emeklilik anında sermaye ürünlerinin yerine yenisinin getirilmesi konusunda herhangi bir varsayıma ihtiyaç yoktur. Beklenen değer (ve varyansın) analitik ifadesi, sermaye mallarının emeklilik sürelerinin üzerine koşullandırmayı ve $[0, t]$ aralığında n-katlı integrali gerektirir ve sonuç çok karmaşıktır. Bazı cebirsel manipülasyonlar kullanılarak (5.4) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$I_t = I_0 + LN_t - S_t^{D^{\alpha(1-\eta)}} + \left\{ \dots \left[\left(-I_0 - LN_1 + S_1^{D^{\alpha(1-\eta)}} \right)^+ \vee \left(-I_0 - LN_2 + S_2^{D^{\alpha(1-\eta)}} \right) \right] \vee \dots \vee \left(-I_0 - LN_t + S_t^{D^{\alpha(1-\eta)}} \right) \right\}.$$

Eğer L yeterince büyükse, $LN_t - S_t^{D^{\alpha(1-\eta)}}$ ifadesinin t cinsinden stokastik olarak artacağı ve $t = 1$ için pozitif olacağı anlamına gelir. Bu tür durumlar için büyüyen kurulu sistemdeki duruma benzer şekilde I_t 'ye bir yaklaşım olarak $I_t^{approx} = I_0 + LN_t - S_t^{D^{\alpha(1-\eta)}}$ 'yı önermekteyiz. Parçaların piyasaya giriş hızının tüketim hızından daha yüksek olduğu durumlarda bu yaklaşımın I_t 'ye yakın olması beklenmektedir. Bu durum, Gama-Poisson-Negatif Binom ilişkisinde λ 'yı, γ ile değiştirerek ve $\alpha(1 - \eta)$ 'yi N_0 ile çarparak karakterize edilebilir (Zipkin, 2000). Ortaya çıkan eşitlik aşağıdaki gibidir

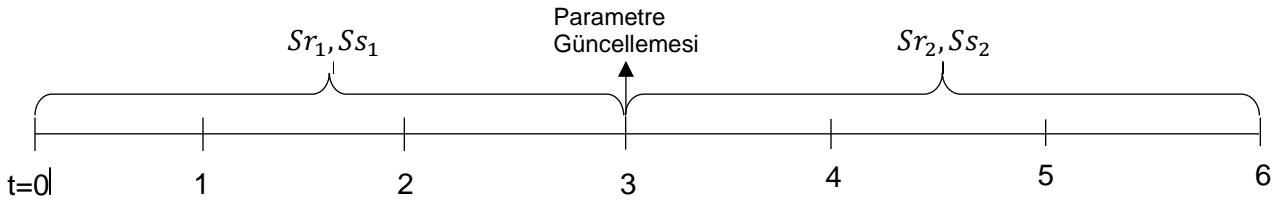
$$L_\epsilon^D := \min \left\{ L \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^L \frac{\lambda(\alpha(1-\eta)N_0)^k}{(\lambda + \alpha(1-\eta)N_0)^{k+1}} > 1 - \epsilon \right\}. \quad (5.6)$$

Bu durum, ikincil marketlerden alınan yedek parça miktarının azalan kurulu sistemler nedeniyle zamanla azalmasından kaynaklanmaktadır. İkincil markete L adet envanter fazlası üreten ve başlangıçtan sonra üstel (λ) miktarda gerçekleşen ilk sermaye ürününün ölümüne kadar bu miktar maksimum seviyededir. Bu süre zarfında, N_0 adet sermaye malı kullanımdadır ve bunların her biri, $\text{Poisson}(\alpha(1 - \nu))$ süreci ile ikincil marketten parçaları alır. Negatif Binom dağılımını kullanarak (5.6)'ya ulaşılır. Önceki bölüme benzer şekilde, (5.4)'deki modeli OPT tarafından üretilecek iade edilmiş ürün miktarına uygulayabiliriz. Azalan kurulu sistemler için (Atasu vd., 2010) OPT'lerin yeniden üretim ve geri dönüşüm eylemleri arasında bir karar vermesi gerektiğini belirtmektedir. Envanterde yeterli miktarda iade edilmiş ürün varsa ek gelir elde etmek için geri dönüşümü seçebilirler. Bu karar için optimuma şu şekilde yaklaşılabılır $t^{rc} = \arg \min \{ t \geq 0 : I_t^{approx} > S_{tot}^{D^{\alpha(1-\eta)}}(t) \}$. Yapılan ön analizler, $\mathbb{E}[I_t^{approx} - S_{tot}^{D^{\alpha(1-\eta)}}(t)]$ 'nin zamanın karmaşık bir

fonksiyonu olduğunu ve bu fonksiyondan anlamlı analitik sonuçlar elde etmenin zor olduğunu ortaya koymaktadır. Bazı içgörüler elde etmek için, ekte sunulan makalenin *elektronik ekinde (E-Companion)* sunulan sayısal deneyler gerçekleştirilmiştir.

3.3. Durağan Olmayan Talep için İkili Tedarik Sistemlerinde Uygulanabilir Politikaların Kullanılması ile Orta Dönemli Planlamanın Yapılması

Durağan olmayan talep dağılımı altında $lt > n$ olduğunda envanter kontrol modelinin optimum kontrol politikası belirlenemediği için politika gradyanı (policy gradient) adı verilen, sezgisel bir arama rutini kullanılmıştır. Bu yaklaşımda literatürdeki mevcut sezgisellerin politika parametreleri üzerinde simülasyon bazlı bir gradyan araması (gradient search) uygulanmıştır. Bunu yaparken talep dağılımı durağan olmadığı için planlama ufkunun belirli noktalarında politika parametrelerinin güncellenmesi yoluna gidilmiştir.



Şekil 38: Politika Gradyanı Sezgiselinin İkili Endeks Politikası Üzerinde Gösterimi

Örneğin ikili endeks politikası sezgiselini ele alalım. Bu sezgiselin 2 adet politika parametresi vardır, bunlar Sr ve Ss ile gösterilsin. Planlama ufkunun 6 periyot olduğunu ve planlama ufku boyunca politika parametrelerinin bir defa güncellendiğini varsayalım. Bu durumda ilk 3 periyot için Sr_1 ve Ss_1 , son 3 periyot için Sr_2 ve Ss_2 olmak üzere 4 farklı politika parametresi üzerinde bir gradyan araması yapılacaktır (Şekil 38). Gradyan aramasına tabi tutulacak politikanın parametre sayısı z ile ve planlama ufku boyunca parametrelerin kaç defa güncelleneceği u ile gösterilsin, bu durumda üzerinde arama yapılacak politika parametreleri vektörünün boyutu $z(u + 1)$ ile bulunur.

Gradyan araması için öncelikle bir başlangıç noktası seçilmesi gerekmektedir. Dahası sezgisel politikalar aracılığıyla hesaplanacak olan maliyet fonksiyonunun ilgili politikanın parametrelerinde dışbükey olup olmadığı bilinmediği için birden fazla başlangıç noktası ile ayrı ayrı aramaların yapılması ve en düşük maliyeti veren aramanın sonuç olarak seçilmesi yoluna gidilmiştir. Bunun için ilk başlangıç noktası olarak $z(u + 1)$ boyutlu bir sıfır vektörü seçilmiştir. Yukarıda verilen ikili endeks politikası örneği için ilk başlangıç noktası $(Sr_1, Ss_1, Sr_2, Ss_2) = (0,0,0,0)$ olacaktır. İkinci başlangıç noktası için öncelikle daha önceden hesaplanan her bir periyoda ait talep dağılımının

parametreleri kullanılarak her bir periyotta gözlemlenebilecek maksimum talep miktarları hesaplanmıştır. Daha sonra her bir güncelleme periyodu içerisinde görülebilecek olan maksimum talep miktarı seçilmiştir. Bu talep miktarları $u + 1$ boyutlu $(dmax_1, \dots, dmax_{u+1})$ vektörü ile gösterilsin. İkinci başlangıç noktası olarak $z(u + 1)$ boyutlu $(dmax_1, \dots, dmax_{u+1})$ vektörü seçilmiştir. Bu vektörde ilk güncelleme periyoduna ait tüm politika parametreleri $dmax_1$ 'e, $u + 1$ 'inci güncelleme periyoduna ait politika parametreleri $dmax_{u+1}$ 'e eşit olacak şekilde seçilmiştir. Yukarıda verilen ikili endeks politikası örneği üzerinden gitmek gerekirse birinci güncelleme periyodu ilk 3 periyodu, ikinci güncelleme periyodu ise son 3 periyodu kapsamaktadır. İlk 3 periyotta gözlemlenebilecek maksimum talep sayısının $dmax_1 = 4$, son 3 periyotta gözlemlenebilecek maksimum talep sayısının $dmax_2 = 8$ olduğu varsayılırsa her bir güncelleme periyodu içerisinde görülebilecek olan maksimum talep vektörü $(4, 8)$ olacaktır. Dolayısıyla ikinci başlangıç noktası $(Sr_1, Ss_1, Sr_2, Ss_2) = (4, 4, 8, 8)$ olacaktır. Bu şekilde gradyan aramasının yapılacağı iki farklı başlangıç noktası $z(u + 1)$ boyutlu politika parametreleri uzayının 2 uç noktasından seçilmiştir. Ayrıca politika gradyanı sezgiselinin performansını arttırmak için bu 2 noktaya ek olarak rastgele seçilen başlangıç noktaları ile de denemeler yapılmış ancak büyük iyileşmeler sağlamadığı ve sezgiselin çalışma süresini uzattığı için daha önce açıklanan 2 nokta ile çalışılması uygun görülmüştür.

Gradyant araması yapılırken ilk adım olarak, politika parametreleri birer tam sayı olduğundan, başlangıç noktasındaki her bir parametrenin birer artırılması ve birer azaltılması böylece mümkün olan her yöndeki gradyantın hesaplanması yoluna gidilmiştir. Her bir artış ve azalışın ardından simülasyon bazlı maliyet hesabı yapılmakta ve maliyeti en çok azaltan yön hangisi ise o parametre vektörü optimum olarak seçilmektedir. Yeni optimum parametre vektörü üzerindeki her bir noktanın birer artırılıp ve birer azaltılmasıyla ayrı ayrı maliyetler hesaplanmaktadır. Bu adımda da maliyetin en çok azaltan yön yeni optimum parametre vektörü olarak seçilmektedir. Bu işlem hesaplanan maliyetlerin tamamında artış görülene kadar tekrarlanmaktadır. Tüm yönlerde artış olduğunda arama sonlandırılmakta ve bir önceki diğer bir deyişle azalış görülen ya da maliyetin değişmediği son parametre vektörü optimum parametre vektörü olarak seçilmektedir. Burada anlatılan gradyan araması her iki başlangıç noktası için de gerçekleştirilmekte ve hangisinin bulunduğu maliyet düşük ise o maliyete ait politika parametreleri vektörü nihai optimum sonuç olarak kabul edilmektedir.

Yukarıda verilen ikili endeks politikası için ilk başlangıç noktası olan $(Sr_1, Ss_1, Sr_2, Ss_2) = (0,0,0,0)$ için gradyan aramasının yapıldığını varsayalım. Bu durumda ilk adımda $(Sr_1, Ss_1, Sr_2, Ss_2) =$

(0,0,0,0) birer arttırılıp azaltılacak ve (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (-1,0,0,0) (0, -1,0,0), (0,0, -1,0), (0,0,0, -1) vektörlerinin her biri için maliyet hesabı yapılacaktır. Maliyetin en çok azaldığı yönün (0,0,0,1) olduğu varsayılırsa ikinci adım olarak bu vektör birer arttırılıp azaltılacaktır. Bu adımlar maliyetlerin tamamında artış görülene kadar tekrarlanacak ve bir önceki adımdaki parametre vektörü optimum parametre vektörü olarak seçilecektir. Daha sonra ikinci başlangıç noktası olan $(Sr_1, Ss_1, Sr_2, Ss_2) = (4, 4, 8, 8)$ üzerinde de bir gradyan araması yapıp, iki başlangıç noktası üzerinde yapılan aramalar sonucunda en düşük maliyeti veren parametre vektörü optimum politika parametreleri vektörü olarak seçilecektir.

Gradyan araması 1000 tekrarlı simülasyonlar aracılığı ile gerçekleştirilmiştir. Bunun için öncelikle kurulu sistemin artan ya da azalan olmasına ve ilgili sistemin λ ve α parametrelerine göre momentleri hesaplanmış ve Ord (1967)'nin geometrik dağılım sınıfı seçim kriterlerine göre her periyodun dağılımı belirlenmiştir. Ardından hesaplanan momentler ile belirlenen dağılımların parametreleri tahmin edilmiş ve bu parametreler ile 1000 adet, planlama ufku boyutunda talep vektörü üretilmiştir. Aynı zamanda aramanın yapıldığı senaryonun market senaryolarına-simetrik, rassal olarak artan, rassal olarak azalan- ait Markov olasılık geçiş matrisleri kullanılarak 1000 adet, planlama ufku boyutunda kapasite vektörü üretilmiştir.

Bu bölümde anlatılan politika gradyanı sezgiseli artan ve azalan kurulu sistemler için ayrı ayrı uygulanmıştır. Aynı zamanda bir optimizasyon modeli geliştirilmiş ve değer öteleme algoritması ile çözümleri gerçekleştirilmiştir. Politika gradyanı sonucunda bulunan optimum parametreler ile hesaplanan maliyetin optimizasyon modeli sonucunda bulunan optimum maliyetten sapması hesaplanarak sezgiselin performansının ölçümü gerçekleştirilmiştir. Tablo 17 ve Tablo 18'de sırasıyla artan ve azalan kurulu sistemler için kullanılan problem parametreleri verilmiştir.

Tablo 17: Artan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiseli Uygulanan Problem Parametreleri

Planlama Ufku	b	h	Sermaye Mallarının		l^r	Market Senaryosu	c^r	η	ξ	İndirgeme Faktörü	u
			Satış Oranı (λ)	Bozulma Oranı(α)							
20	15	5	Poisson (0,05)	Poisson (0,05)	1	1	5	0	1	0,99	0
	95	1	Poisson (0,25)	Poisson (0,25)	2	2		-0,9	1,1		1
					3	3		-0,1	2		3
											4

Tablo 18: Azalan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiseli Uygulanan Problem Parametreleri

Planlama Ufku	b	h	Sermaye Mallarının		l^r	Market Senaryosu	c^r	η	ξ	İndirgeme Faktörü	u
			Satış Oranı (λ)	Satış Oranı (λ)							
20	15	5	Poisson (0,05)	Poisson (0,05)	1	1	5	0	1	0,99	0
	95	1	Poisson (0,25)	Poisson (0,25)	2	2		-0,9	1,1		1
					3			-0,1	2		3
											4

Gerçekleştirilen sayısal deneylerde Tablo 17 ve Tablo 18'de verilen problem parametrelerinin oluşturduğu uzayların alt uzayları kullanılmıştır. Bu parametrelerden b birim başına uygulanacak elde tutma maliyetini, h birim başına uygulanacak talebi karşılayamama maliyetini temsil etmektedir. l^r OPT'nin termin süresini göstermekte, c^r ise OPT'den alınan birim başına parça maliyetini temsil etmektedir. η ve ξ değerleri ise ikincil marketlerin satın alma maliyetini veren fonksiyonun ($c(q, K) = c_0 q^\xi K^\eta$) parametreleridir. Bu fonksiyondaki c_0 değerinin ise c^r 'ye eşit olduğu kabul edilmiştir. u ise politika parametrelerinin kaç defa güncelleneceğini ifade etmektedir. Sayısal deneylerde büyüyen kurulu sistem için $\lambda = 0.25$, $\alpha = 0.25$ olduğu durum ve küçülen kurulu sistemler için $\lambda = 0.5$, $\alpha = 0.25$ olduğu durum Bölüm 3.1.1 ve Bölüm 3.1.2 ile aynı sebeplerden ötürü değerlendirilmeye alınmamıştır.

Politika gradyanı sezgiseli ikili indeks ve baz-sürgün politikaları üzerinde uygulanmış, sınırlanmış ikili indeks (*capped dual index*) sezgiseli için uygulanmamıştır. Bunun sebebi diğer iki politikanın parametre sayısı 2 iken sınırlanmış ikili indeks politikasının politika parametresi sayısının 3 olması ($z = 3$) nedeniyle her adımda daha fazla işlem gerektirmesi ve yapılan deneylerde çok uzun süre boyunca optimum parametrenin bulunamamasıdır. Politika gradyanı sezgisel arama rutinin artan ve azalan sistemler üzerinde uygulanması sonucunda, politika parametrelerinin güncelleme sayısına göre optimum maliyetten ortalama yüzde sapmaları Tablo 19 ve Tablo 20'de verilmiştir.

Tablo 19: Artan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiselinin Optimum Politikadan Sapmaları

Güncelleme Sayısı (u)	İkili Endeks Politikası	Baz-Sürgün Sezgiseli
0	7,27%	49,60%
1	6,18%	39,38%
3	4,60%	32,58%
4	4,32%	28,83%

Tablo 20: Azalan Kurulu Sistemler için Politika Gradyanı Sezgiselinin Optimum Politikadan Sapmaları

Güncelleme Sayısı (u)	İkili Endeks Politikası	Baz-Sürgün Sezgiseli
0	6,09%	65,81%
1	3,93%	42,18%
3	2,74%	27,12%
4	2,53%	23,99%

Tablo 19'da görüldüğü üzere artan kurulu sistemlerde en iyi performansı 4 güncelleme gerçekleştirilen durumda 4,32% sapma ile ikili endeks politikası göstermiştir. Beklenildiği üzere güncelleme sayısı arttıkça politika parametreleri durağan olmayan talebe daha iyi adapte olmakta ve her iki politikanın da performansı yükselmektedir. Aynı şekilde Tablo 20'deki sonuçlar azalan kurulu sistemlerin için en iyi performansı politika parametrelerinin 4 defa güncellendiği durumda 2,53% sapma ile ikili endeks politikası göstermektedir. Azalan kurulu sistemler için de güncelleme sayısı arttıkça her iki politikanın performansı artmaktadır.

4. Proje Önerisinde Yer Almayıp Ek Olarak Gerçekleştirilen Araştırmalar

Proje raporunun bu bölümünde önerinin ilk halinde yer almayan ancak elde edilen sonuçların dergiye gönderilmesi sürecinde, sonuçların uygulamadaki etkilerinin gösterilmesi için araştırmaya dahil edilmiş sonuçlara yer verilmiştir. Bu minvalde gerçekleştirilen araştırmalar iki temel başlık altında toplanabilir. İlk olarak azalan kurulu sistemlerdeki sermaye mallarının ömürlerinin uzatılması için gereken yatırım politikasının analiz edilmesi gerçekleştirilmiştir. Özellikle ekonomik ömürlerinin son dönemleride bulunan sermaye mallarının üreticileri, örn. Boeing, Airbus, Fokker, ürünlerin servis ömürlerini uzatacak şekilde teknik geliştirmeler gerçekleştirebilmektedirler. Bu tür teknik yatırımlar ürünlerin daha uzun süre kullanılmasını sağladığı için genel olarak çevre dostu olarak değerlendirilmektedir. Bölüm 4.1'de üreticisi olduğu sermaye mallarının ekonomik ömrünü uzatmaya yönelik yatırım kararı vermeye çalışan bir firmanın kar maksimizasyonu problemine odaklanılmıştır. Bölüm 4.2'de ise azalan kurulu sistemler için sermaye mallarının devreden çıkmasının Poisson süreci yerine birbirinden bağımsız olarak gerçekleşmesi durumunda toplam yedek parça talebinin karakterizasyonu gerçekleştirilmiştir.

4.1. Azalan Kurulu Sistemlerdeki Sermaye Mallarının Ömürlerinin Uzatılmasına Yönelik Optimum Yatırım Politikasının Analiz Edilmesi

Günümüzde gittikçe artmakta olan çevresel sorunlar şirketleri ekstra hizmetler ve ürünlerin ekonomik ömürlerini uzatan ürün güncelleme ve yükseltmeleri (*product updates and upgrades*) sunmaya motive etmektedir. Bu tür uygulamalar, ürünlerin yaşam döngüleri boyunca ortaya çıkarttıkları kirliliğin büyük çoğunluğu üretim ve iskartaya çıkarma ve yoketme süreçlerinde olduğu için, yeşil ve çevre dostu olarak kabul edilir. Mevcut ürünlerin dayanıklılığının artırılarak ekonomik ömürlerinin uzatılması bu nedenle antropolojik ekonomik faaliyetlerin çevresel yükünü uzun vadede azaltan bir uygulama olarak değerlendirilmektedir (Huang vd., 2019).

OPT'lerin (varlık sahipleri) bakış açısından kurulu sistemlerdeki dinamik değişiklikler nedeniyle yükseltme kararlarını almak zor olabilir. Ürünün ekonomik ömrünü uzatmaya yönelik geliştirme ve güncellemeler tasarım, test ve geliştirme süreçleri nedeniyle önemli maliyetlere yol açabilir. OPT'ler ise genellikle ömür uzatma yatırımlarının bir getirisi olarak ek onarım talebi beklerler. Fokker Services B.V.'nin Fly-Fokker programı (Dekker v.d., 2013) dayanıklı ürünler için üretici tarafından başlatılan ömür boyu uzatma yatırımlarına iyi bir örnektir.

Bu bölümde, bir OPT'in yatırım kararı için kâr maksimizasyonu perspektifinden matematiksel bir model sunulmuştur. OPT, gerekli yatırım miktarını ve ürünlerin onarım talebinden gelen geliri göz önünde bulundurarak, yatırımdan sonra kârını en üst düzeye çıkaran optimum yükseltme seviyesini seçmeyi amaçlamaktadır.

Bu amaçla, kullanımda olan N_0 adet sermaye malının satış sonrası pazarında lider konumda olan bir OPT dikkate alınmıştır. OPT her onarım işlemi için müşterilerinden c^r kadar ücret alır. Her ürünün onarım talebinin oluşması arasında geçen süreler (interarrival times) α parametrelili bir üstel dağılımı takip eder. Ürünler sınırlı ve rastgele yaşam sürelerine sahiptir ve ölümleri λ parametrelili bir Poisson sürecini izler. Burada, bir müşterinin eski ürününü emekliye ayırdığında başka bir markaya geçtiğini, bu nedenle de OPT'nin kurulu sistemlerinin ömürlerini kasıtlı olarak sınırlamak için herhangi bir motivasyonun olmadığı varsayılmıştır (Agrawal ve diğerleri, 2019). Planlama ufkunun başlangıcında N_0 adet ürün olduğunda OPT tarafından alınan toplam onarım talebi miktarı Önerme 1.2.3'de $S_{tot}^D(\lambda)$ ile gösterilir. Notasyonel netlik için Önerme 1.2.3'deki tanıma λ parametresi eklenmiştir.

Dayanıklılık uzatma yatırımı yapıldığında, ürünlerin yeni ölüm oranı $\lambda' := \lambda(1 - \nu)$, $1 > \bar{\nu} \geq \nu \geq 0$ 'a düşmektedir. ν bir yükseltmenin ürünlerin dayanıklılığı (ölüm oranı) üzerindeki etkisini temsil ederken, $\bar{\nu}$ kullanım ömrü uzaması üzerindeki teknolojik kısıtlamaları ifade eder. Burada $\bar{\nu} = 1$ ömür uzatma yatırımından sonra sermaye mallarının sonsuz uzunluktaki ömürlerini ifade etmektedir. Ölüm oranını $1 - \nu$ faktörü kadar düşürmek için gereken yatırım miktarının, azalan getiri oranı nedeniyle dışbükey olduğu varsayılmıştır. Bu bölümde maliyet-ürün dayanıklılığı arasındaki ilişki ikinci dereceden bir polinom ile gösterilmiştir; $c^l(\nu) := c_0\nu^2$. Bu tanımlar kullanılarak ürün yükseltmelerinden sonra beklenen ek kâr $\Pi(\nu) = -c^l(\nu)N_0 + c^r(S_{tot}^D(\lambda') - S_{tot}^D(\lambda))$ ifadesiyle elde edilmiştir. Aşağıdaki sonuçta Önerme 1.2.3'ün doğal sonucu olarak $\Pi(\nu)$ 'nin beklenen değeri ve varyansı sunulmuştur.

Sonuçsal Önerme 1. Verilen bir N_0 , λ ve ν için her bir ürünün eşik yatırım maliyetinin beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibidir:

- i. $\mathbb{E}[\Pi(\nu)] = -c_0\nu^2 N_0 + c^r \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 \frac{\nu}{1-\nu},$
- ii. $Var(\Pi(\nu)) = c^r^2 \beta_1 \frac{\alpha}{\lambda} \frac{2-\nu}{1-\nu} \left(1 + \frac{\beta_1}{3} \frac{\alpha}{\lambda} (2N_0 + 1) \frac{1}{1-\nu}\right) - c^r^2 \frac{\beta_1^2}{3} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 (2N_0 + 1) \frac{\nu}{1-\nu}.$

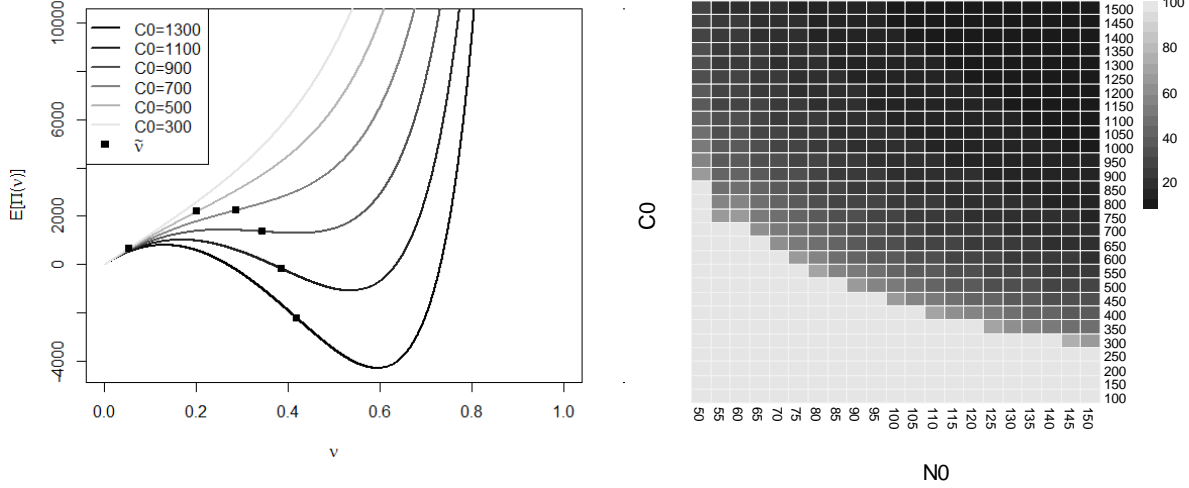
Sonuçsal Önerme 1, beklenen kârın c^r ve $\frac{\alpha}{\lambda}$ 'da doğrusal olarak arttığını, oysa N_0 'ın ikinci dereceden bir polinomu olduğu anlamına gelir. Kârın varyansı, parametrelerin doğrusal olmayan bir fonksiyonudur.

Yatırım kararları için, bu bölümde riske duyarsız (risk-neutral) ve riskten kaçınan (risk-averse) karar vericiler ele alınmıştır. Riske Duyarsız Karar Verici (RDKV), $f(\nu) = \mathbb{E}[\Pi(\nu)]$ ile belirtilen yatırımdan beklenen (ek) kârı maksimize etmeye odaklanır. Aşağıdaki önerme, $\nu_{rn}^* = \arg \max_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} f(\nu)$ olarak tanımlanan RDKV için optimum yatırım kararını karakterize etmektedir.

Önerme 4.1. Aşağıdaki ifadeler riskse duyarsız bir karar verici için geçerlidir.

- i. Eğer $\nu \leq \tilde{\nu}$ ise $f(\nu)$ bir içbükey fonksiyondur, aksi durumda $f(\nu)$ ν 'de bir dışbükey fonksiyondur öyle ki $\tilde{\nu} = 1 - \left(\frac{c^r}{c_0} \frac{\alpha}{\lambda} \frac{N_0+1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ dönüm noktasıdır.
- ii. Aşağıdakiler optimum yatırım seviyesini karakterize etmektedir:

- a) Eğer $\tilde{v} \geq \frac{1}{3}$ ise $f'(\tilde{v}) \leq 0$ ve $v^* = \arg \max_{v \in [0, \tilde{v}]} \{f(v)\}$.
- b) Eğer $0 < \tilde{v} < \frac{1}{3}$ ise $f'(\tilde{v}) > 0$ ve $v^* = \bar{v}$.
- c) Eğer $0 \geq \tilde{v}$ ise $f(v)$, $v \in [0, \tilde{v}]$ 'da ve $v^* = \bar{v}$ 'da dışbükey artandır.



(a) RDKV'nin Kârının Beklenen Değeri

(b) Optimum Yatırımın v_{rn}^*/\bar{v} Cinsinden Gösterimi

Şekil 39: RDKV'nin Optimum Ömür Uzatma Yatırımı

Önerme 4.1'deki sonuçlar, eğer toplam yatırım maliyeti toplam onarım talebinden elde edilen gelirin $\frac{27}{8}$ katından yüksekse, yani $c_0 N_0 > \frac{27}{8} c^r \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1$, optimum yatırım kararının $[0, \bar{v}]$ 'de gerçekleşeceği anlamına gelmektedir. Yatırım maliyetinin daha ucuz olması durumunda RDKV'nin optimum kararı, v_{rn}^* , v 'nin artan bir fonksiyonu olduğundan, optimum yatırım kararı sermaye ürünlerinin dayanıklılığını mümkün olduğu kadar uzatmaktır, $v_{rn}^* = \bar{v}$.

Şekil 39'da, amaç fonksiyonunun şekli (Şekil 39(a)) ve optimum yatırım seviyeleri (Şekil 39(b)) için yapılan sayısal deneyler sunulmuştur. Özellikle, c_0 'ın daha yüksek değerleri $f(v)$ 'nün dönüm noktasını, \tilde{v} , 1'e yaklaştırır ve \bar{v} 'yi v_{rn}^* için kritik hale getirir (Şekil 39(a)). Şekil 39(b)'de ise siyah-beyaz renk skalası ile v_{rn}^*/\bar{v} değerleri ifade edilmiştir. Görüldüğü gibi optimum yatırım için, $N_0 c_0$ gibi bir eşik değeri bulunmaktadır. Bu eşığın altında dayanıklılık uzatma yatırımını karşılamak için yeterli miktarda ürün bulunmadığı için kullanım ömrü uzatma işlemi net bir şekilde yarı optimum (suboptimal) hale gelmektedir.

Riskten Kaçınan Karar Verici (RKKV), aşırı varyanstan kaçınırken beklenen yatırım getirisini maksimize etmeye çalışmaktadır. Bir RKKV'nin optimizasyon problemini modellemek için, (beklenen) kârı en üst düzeye çıkarırken riski cezalandıran bir amaç fonksiyonu kullanılmıştır: Öyle ki, RKKV için amaç fonksiyonunda kâr fonksiyonunun beklenen değerinden varyansı çıkartıldığı bir optimizasyon model dikkate alınmıştır. Bu amaç fonksiyonuna Ortalama-Varyans yaklaşımı (Tomlin, 2006) adı verilmektedir (Ray ve Jenamani, 2016). Bir RADM'nin amaç fonksiyonu, Önerme 4.1'deki sonuçlardan yararlanılarak $g(\nu)$ olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$g(\nu) = \mathbb{E}[\Pi(\nu)] - AVar(\Pi(\nu)) = -c_0\nu^2 N_0 + c^r \frac{\alpha}{\lambda} \beta_1 \frac{\nu}{1-\nu} - A \left\{ c^{r^2} \beta_1 \frac{\alpha}{\lambda} \frac{2-\nu}{1-\nu} \left(1 + \frac{\beta_1 \alpha}{3 \lambda} (2N_0 + 1) \frac{1}{1-\nu} \right) - c^{r^2} \frac{\beta_1^2}{3} \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right)^2 (2N_0 + 1) \frac{\nu}{1-\nu} \right\},$$

burada A karar vericilerin dayanıklılık artırma yatırımı için riskten kaçınma konusundaki isteğini temsil eden riskten kaçınma parametresidir. Aynı zamanda A varyans kısıtı üzerinden gerçekleşen bir kâr maksimizasyonu probleminin Lagrange çarpanı olarak da düşünülebilir. Aşağıdaki teorem belirli bir A için, $\nu_{ra}^* = \arg \max_{0 \leq \nu \leq \bar{\nu}} g(\nu)$ olarak tanımlanan bir RKKV'nin optimum yatırım kararını belirler.

Önerme 4.2. Aşağıdaki ifadeler, riskten kaçınan bir karar vericinin amaç fonksiyonu için geçerlidir.

- i. Eğer $Ac^r > \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\beta_1 \frac{\alpha}{\lambda} (2N_0 + 1)}$ ise $g(\nu)$, $\nu \in [0, \bar{\nu}]$ 'de içbükey azalan bir fonksiyondur ve $g'(0) < 0$. Bu nedenle $\nu_{ra}^* = 0$.
- ii. Eğer $\frac{1}{1 + \frac{2}{3}\beta_1 \frac{\alpha}{\lambda} (2N_0 + 1)} \geq Ac^r \geq \frac{1}{1 + \beta_1 \frac{\alpha}{\lambda} (2N_0 + 1)}$ ise $g(\nu)$, $\nu \in [0, \bar{\nu}]$ 'de içbükey bir fonksiyondur ve $g'(0) \geq 0$. Bu nedenle $\nu_{ra}^* = \min(\hat{\nu}, \bar{\nu})$ öyle ki $g'(\hat{\nu}) = 0$.
- iii. Eğer $\frac{1}{1 + \beta_1 \frac{\alpha}{\lambda} (2N_0 + 1)} > Ac^r$ ise optimum politika belirsizdir, diğer bir deyişle sistemin parametrelerine bağlı olarak değişir.

Eşitsizliğin sağ tarafı $N_0 = 10$ ve $\frac{\alpha}{\lambda} = 1$ için bile $1,2 \times 10^{-3}$ 'e eşit olduğundan, Önerme 4.2'deki i. ifadesi $[0, 1]$ aralığında neredeyse tüm elde edilebilir A değerleri tarafından sağlanır. Sadece çok küçük A değerleri için $\nu_{ra}^* > 0$ ve A 'nın tüm pozitif değerleri için $\nu_{ra}^* < \nu_{rn}^*$. Bu nedenle, artan dayanıklılık varyansa beklenen değerden çok daha fazla katkıda bulunduğu riskten

kaçınma optimum kararı tamamen değiştirir. Sonuç olarak, hafif bir riskten kaçınma eğilimi bile yatırımın azalan kurulu sistem için yarı optimal olmasına neden olur.

Bu bölümdeki sonuçlar aynı zamanda ürünlerinin dayanıklılığını ve ekonomik ömürlerini artırmak için ücretsiz onarım hizmeti sağlayan Patagonia vakası (Agrawal ve diğerleri, 2019) hakkında da fikir sağlamaktadır. Patagonia vakasında üretici, ürünlerinin kalan faydalı ömürlerini uzatmak için gerekli yatırımı yapar ve piyasada yeşil bir şirket imajı oluşturmak (veya güçlendirmek) için ücretsiz onarımlar (onarım maliyetini göze alarak, $c^r < 0$) sağlar. Pazardaki bu algı sayesinde Patagonia, yeni ürünlerini (rakiplerine kıyasla) %30 daha yüksek fiyata satabilmektedir (Reinhardt ve diğerleri, 2010). Sonuçlarımız hem beklenen değer hem de varyans c^r ve N_0 'ın yüksek dereceli polinomları olduğu için böyle bir stratejinin yalnızca düşük onarım maliyetlerin olduğu (kıyafetlerin onarımı) sınırlı sayıda ürün için mümkün olduğunu göstermektedir.

4.2. Bağımsız Karar Vericilerle Azalan Kurulu Sistemler için Talep Dağılımının Türetilmesi

Azalan kurulu sistem senaryosunda kullanımdaki her bir ürün farklı karar vericiler tarafından emekliye ayrıldığında, ürün ölümlerinin birbirinden bağımsız olduğu düşünülmelidir. Piyasada N_0 adet ürün olduğunu varsayalım, bunlar en eskiden en yeniye doğru sıralı ve i ile indekslenmiş olsun. Bu problemde, $i = 1$ en eski ürünü temsil eder. Ürün yaşlarına göre yapılan sıralamanın doğal bir sonucu olarak, her bir ürünün ölümüne kadar geçen süre stokastik olarak artmaktadır. i ürününün ölümüne kadar geçen süre $Erlang(i, \lambda)$ ile dağılım gösterebilir, $i = 1, 2, \dots, N_0$. Bu modelleme seçimi şu şekilde yorumlanabilir: Her ürünün ömrü M farklı aşamadan oluşur, $M \geq N_0$, ve her aşama üstel(λ) dağılır. $t = 0$ anında, en eski ürün $M - 1$ aşamasındadır, yani kalan ömrü 1 aşamadır, en yeni ürün ise $M - N_0$ aşamasındadır. Geri kalan ürünlerin yaşları ise $M - N_0 - i$, $i = 1, \dots, N_0 - 1$ olarak ifade edilir.

$N(t)$, t zamanına kadarki ölüm sayısı ve $m(t)$ de $[0, t)$ aralığında bir üründen kaynaklanan yedek parça talebi olarak tanımlansın. $\beta_t = N(t)(N(t) + 1)/2$ olsun. Zipkin (2000, §7.5) tarafından, $m(t) \sim Poisson(\alpha_t)$ ve $T_i \sim Erlang(i, \lambda)$ olduğu durumda $m(T_i) \sim Negatif Binom\left(i, \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)$ olduğunu gösterilmiştir. Bizim problem kurulumumuzda $m(T_i)$, i üründen ürünün ölümüne kadar gelen yedek parça talebini temsil etmektedir. Bu model aşağıdaki gözlemden kaynaklanmaktadır. t zamanında $N(t)$ ölüm varsa, ölen ürünlerden toplam yedek parça talebi $p =$

$\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}$, $n = \sum_{i=1}^{N(t)} i = \beta_t$ parametrelili Negatif Binom dağılımlarının bir konvolüsyonudur. t anında her biri $Poisson(\lambda)$ prosesi ile yedek parça talebi oluşturan $N_0 - N(t)$ adet canlı ürün vardır. Bu gözlem $0 < N(t) < N_0$ için geçerlidir. \tilde{S}_t^D ile gösterilen kümülatif yedek parça talebi aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{S}_t^D = \sum_{i=1}^{N(t)} m(T_i) + \sum_{i=N(t)+1}^{N_0} m(t),$$

ve böylece

$$\tilde{S}_t^D \sim N.Binom\left(\beta_t, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right) + Poisson((N_0 - N(t))\alpha_t), \quad (4.1)$$

burada tanım gereği $0 < N(t) < N_0$.

$N(t) = 0$ olduğunda, ölü ürün yoktur. Dolayısıyla kümülatif talep süreci $Poisson(N_0\alpha_t)$ süreçleridir. $N(t) = N_0$ ise tüm ürünler ölmüştür. Bu nedenle, toplam yedek parça talebi $N.Binom\left(\beta_1, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)$ öyle ki $\beta_1 = \frac{N_0(N_0+1)}{2}$ dir. Burada $t \rightarrow \infty$ için β_t , β_1 'e yakınsar ve $(N(t) - N_0)$ süreci olasılıksal olarak sifira yakınsar.

5. SONUÇ

Sermaye mallarının güvenilir ve sürdürülebilir bir şekilde çalışması için gerekli olan yedek parçaların tedarik zincirinin planlanması için yedek parçanın talep dağılımına ihtiyaç duyulmaktadır. Yedek parça dağılımının durağan olduğu sermaye malının yaşam döngüsünün olgunluk döneminde tedarik zincirinin organizasyonu görece kolaydır. Nitekim literatürdeki bir çok yaklaşım durağan talebe odaklanarak alsında olgunluk devresinde uygun olabilecek şekilde tasarlanmış durumdadır. Diğer yandan sermaye ürünlerinin yaşam döngüsünün ilk (artış) ve son (azalış) dönemlerinde ortaya çıkan durağan olmayan yedek parça talep dağılımı için mevcut envanter kontrol teknikleri seçilen dağılımın parametrelerinin düzenli olarak güncellenmesi yolu ile adapte edilmektedir. Bununla beraber, yedek parça tedarik zincirlerinde, diğer birçok üründe görülmeyen bir yapı olan, ikincil marketler alternatif bir tedarik kaynağı olarak bakım yapan firmaların yok düşerek bakım hizmetinin gecikmesini önleyici bir rol oynayabilmektedir.

Bu projede ilk olarak kurulu sistem büyüklüğünün arttığı ve azaldığı durumlarda ortaya çıkan yedke parça talebinin dağılımı için Ord'un hipergeometrik dağılım ailesini kullanan bir algoritma

önerilmiştir. Bu dağılım ailesi, Poisson, Negatif Binom, Binom gibi bilinen kesikli dağılımların yanında hipergeometric, Beta-Pascal, Beta-Binom gibi görece daha az bilinen dağılımları da içeren geniş bir settir. Ord (1967) bu ailedeki dağılımların ilk üç momentin kullanıldığı istatistikler yardımıyla ayrıştırılabileceğini göstermiştir. Bu projede, bu bulgudan hareketle hipergeometrik dağılım ailesinden dinamik olarak dağılım seçen bir dağılım geliştirilmiştir. Bu doğrultuda ilk olarak artan ve azalan kurulu sistemler için proje önerisinde belirtilen iç içe geçmiş iki homojen Poisson süreçleri dikkate alınmıştır. Artan kurulu sistemler için dışarıdaki Poisson süreci yeni ürünlerin kurulumu (satışını) verirken her bir ürünün bozulması için dikkate alınan iç Poisson süreçleri kullanılarak toplam yedek parça talebi hesaplanmıştır. Azalan kurulu sistemler için ise, dış Poisson süreci ürünlerin devreden çıkartılmasını temsil ederken içerdeki Poisson süreci yedek parça bozulmalarını ifade etmektedir. Bu stokastik sistemler için ilk olarak kümülatif merkezi ve merkezi olmayan momentler analitik olarak hesaplanmış, daha sonra bu formülasyonlar aracılığı ile marjinal (verilen bir zaman periyodu için) talep dağılımı elde edilerek her bir zaman noktası için bir dağılım seçilmiştir. Projenin bu aşamasından elde edilen sonuçlara göre artan ve azalan kurulu sistemlerde zamanın başında Poisson dağılımı kullanılmaktadır. Daha sonra artan kurulu sistemlerde ya Beta-Pascal veya Negatif Binom dağılımı tercih edilmeli ve zaman ilerledikçe talep Beta-Binom dağılımına kaymaktadır. Azalan kurulu sistemlerde ise Beta-Pascal hiç seçilmemekte ve dağılım Negatif ve Beta-Binom arasında, sistemin parametrelerine göre değişiklik göstermektedir. Bulunan bu teorik sonuçlar istatistiksel iyi uyum testleri ile sınımadan geçirilmiş ve önerilen dağılım seçim yönteminin sürekli Poisson-Negatif Binom dağılımlarının kullanıldığı alternatiflere göre daha iyi performans gösterdiği bulgulanmıştır.

Bu aşamadan sonra, ikincil marketlerdeki parça sayısının Markov zincirini takip ettiği ve talebin durağan olduğu sistemler için optimum envanter kontrol politikası çalışılmıştır. Bu politikanın karakterizasyonu termin süresinin bir periyot olduğu durum için analitik olarak karakterize edilmiş, diğer durumlar için sezgisel yöntemler denenerek performansları karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalarda ikili endeks politikasının daha iyi performans gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır. Daha sonra bu analizler durağan olmayan talep için genelleştirilmiş ve ikili endeks politikasının diğer sezgisel yöntemlere göre durağan olmayan talep için de daha iyi performans gösterdiği bulgulanmıştır.

Bu aşamayı takiben ikincil marketlerdeki parça sayısı ile kurulu sistem büyüklüğü arasındaki ilişki için, artan ve azalan sistemlere yönelik analitik modeller geliştirilmiştir. İkincil marketlerdeki beklene parça sayısı analitik olarak çok karmaşık olduğu için beklenen değere yaklaşım

gösterecek basit formülasyonlar önerilmiştir. Daha sonra elde edilen sonuçlar ve sisteme dair içgörüler orta vadeli planlama probleminde uygulanarak farklı politikaların birbirile ile karşılaştırılması gerçekleştirilmiştir.

Son olarak proje önerisinde yer almayan ancak elde edilen teorik sonuçların farklı alanlara da uygulanabilir olduğunu gösteren analizlere gerçekleştirilmiştir. Bunlardan en önemlisi yaşam döngüsünün son dönemindeki ürünlerin ekonomik ömrünün arttırmak için firmaların gerçekleştirdiği teknoloji yatırımlarıdır. Bu proje kapsamında risk-naturel ve riskten kaçıcı tipteki iki karar verici için optimum yatırım politikasının karakterizasyonu gerçekleştirilmiştir.

Proje kapsamında elde edilen sonuçlardan şimdiye kadar 1 makale çıkartılarak *Operations Research* dergisine gönderilmiştir. Gönderilen makale ve eki bu rapora ek olarak sunulmuştur. Bununla beraber proje kapsamında yüksek lisans öğrencisi Ali Kök'ün yüksek lisans tezi tamamlanmıştır. Bu öğrencinin tezinde sunulan, bu raporun ikinci ve üçüncü bölümlerinde verilmiş, sonuçlardan bir tane daha makale yazılması planlanmaktadır. Ayrıca projede elde edilen sonuçların firmalara uygulanması için bir yedek parça firması ile anlaşarak ikincil, ampirik verinin kullanılarak geliştirilen modellerin kalibre edileceği, bir araştırma projesine başlanmıştır.

REFERANSLAR

- Adan, I. J. B. F., van Eenige, M. J., & Resing, J. A. C., 1994. *Fitting discrete distributions on the first two moments*. Eindhoven University of Technology, Department of Mathematics and Computing Science.
- Agrawal, V., Atasu, A. and Van Wassenhove, L., 2019. OM Forum—New Opportunities for Operations Management Research in Sustainability. *Manufacturing & Service Operations Management*, 21(1), pp.1-12.
- Allon, G. and Van Mieghem, J., 2010. Global Dual Sourcing: Tailored Base-Surge Allocation to Near- and Offshore Production. *Management Science*, 56(1), pp.110-124.
- Atasu, A., Guide, V. and Van Wassenhove, L., 2010. So What If Remanufacturing Cannibalizes My New Product Sales?. *California Management Review*, 52(2), pp.56-76.
- Cohen, M.A., N. Agrawal, V. Agrawal. 2006. Winning in the aftermarket. *Harvard business review* 84(5) 129.
- Dekker, R., Pinçe, Ç., Zuidwijk, R. and Jalil, M., 2013. On the use of installed base information for spare parts logistics: A review of ideas and industry practice. *International Journal of Production Economics*, 143(2), pp.536-545.

- Ferguson, M. and Toktay, L., 2009. The Effect of Competition on Recovery strategies. *Production and Operations Management*, 15(3), pp.351-368.
- Fukuda, Y., 1964. Optimal Policies for the Inventory Problem with Negotiable Leadtime. *Management Science*, 10(4), pp.690-708.
- Hekimoglu, M., 2015. Spare Parts Management of Aging Capital Products. ERIM Ph.D. Series Research in Management, 2015(368).
- Hekimoğlu, M., van der Laan, E. and Dekker, R., 2018. Markov-modulated analysis of a spare parts system with random lead times and disruption risks. *European Journal of Operational Research*, 269(3), pp.909-922.
- Hua, Z., Yu, Y., Zhang, W., & Xu, X., 2015. Structural properties of the optimal policy for dual-sourcing systems with general lead times. *IIE Transactions*, 47(8), 841-850.
- Huang, W., Li, S. and Su, J., 1993. Some characterizations of the Poisson process and geometric renewal process. *Journal of Applied Probability*, 30(01), pp.121-130.
- Jin, T. and Liao, H., 2009. Spare parts inventory control considering stochastic growth of an installed base. *Computers & Industrial Engineering*, 56(1), pp.452-460.
- Kleber, R., Quariguasi Frota Neto, J. and Reimann, M., 2020. Proprietary parts as a secondary market strategy. *European Journal of Operational Research*, 283(3), pp.929-941.
- Li, X., Dekker, R., Heij, C. and Hekimoğlu, M., 2016. Assessing End-Of-Supply Risk of Spare Parts Using the Proportional Hazard Model. *Decision Sciences*, 47(2), pp.373-394.
- Li, Z., Xu, S. and Hayya, J., 2004. A PERIODIC-REVIEW INVENTORY SYSTEM WITH SUPPLY INTERRUPTIONS. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 18(1), pp.33-53.
- ORD, J., 1967. On a system of discrete distributions. *Biometrika*, 54(3-4), pp.649-656.
- Ray, P. and Jenamani, M., 2016. Mean-variance analysis of sourcing decision under disruption risk. *European Journal of Operational Research*, 250(2), pp.679-689.
- Reinhardt, F., Kim, H. and Casadesus-Masanell, R., 2010. *Patagonia*. Boston, Mass: Harvard Business School Pub.
- Sherbrooke, Craig C. 2006. Optimal inventory modeling of systems: multi-echelon techniques, vol. 72. Springer Science & Business Media.
- Sun, J. and Van Mieghem, J., 2019. Robust Dual Sourcing Inventory Management: Optimality of Capped Dual Index Policies and Smoothing. *Manufacturing & Service Operations Management*, 21(4), pp.912-931.
- Tomlin, B., 2006. On the Value of Mitigation and Contingency Strategies for Managing Supply Chain Disruption Risks. *Management Science*, 52(5), pp.639-657.
- Tripathi, R., Gupta, R. and Gurland, J., 1994. Estimation of parameters in the beta binomial model. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 46(2), pp.317-331.
- Veeraraghavan, S. and Scheller-Wolf, A., 2008. Now or Later: A Simple Policy for Effective Dual Sourcing in Capacitated Systems. *Operations Research*, 56(4), pp.850-864.

Whittmore, A. and Saunders, S., 1977. Optimal Inventory Under Stochastic Demand with Two Supply Options. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 32(2), pp.293-305.

Xin, L. and Goldberg, D., 2018. Asymptotic Optimality of Tailored Base-Surge Policies in Dual-Sourcing Inventory Systems. *Management Science*, 64(1), pp.437-452.

Zipkin, P., 2000. *Foundations Of Inventory Management*. Boston: McGraw-Hill.

Zipkin, P., 2008. On the structure of lost-sales inventory models. *Operations research*, 56(4), 937-944.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Dr. Öğr. Üyesi MUSTAFA HEKİMOĞLU
Proje No:	118M477
Proje Başlığı:	Yedek Parça Envanter Yönetiminde Kurulu Sistem Bilgisinin Varlığında İkincil Marketlerin Optimum Şekilde Kullanılması
Proje Türü:	3501 - Kariyer
Proje Süresi:	20
Araştırmacılar:	DENİZ KARLI
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	KADİR HAS Ü. MÜHENDİSLİK VE DOĞA BİLİMLERİ F. ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	01/12/2018 - 01/08/2020
Onaylanan Bütçe:	146730.0
Harcanan Bütçe:	123822.13
Öz:	<p>Sermaye malları kesintisiz çalışmak için düzenli bakıma ihtiyaç duymaktadırlar. Bu gereksinimin yüksek kalitede sürdürülebilmesi sermaye malının satışında önemli bir rol oynamaktadır. Sermaye malının üreticisi için ürünlerin satış-sonrası hizmetleri yüksek kar marjları sağlamaktadır. Bununla beraber parçaların üreticisinden bakım noktasına sevkiyatın sorunsuz gerçekleşebilmesi ciddi bir planlama faaliyetini gerektirmektedir. Yedek parça tedarik zincirinin planlanmasında talep dağılımı temel girdi olarak kullanılmaktadır. Talebin durağan bir dağılım gösterdiği dönemlerde planlama görece daha kolayken, talebin durağan olmadığı, sermaye malının ekonomik ömrünün artış ve azalış dönemlerinde, yedek parça tedarik zinciri için gerçekleştirilen planlama aktiviteleri ciddi aksaklıklara maruz kalmaktadır. Bununla beraber, yedek parça tedarik zincirindeki önemli yapılardan bir tanesi de ikincil marketlerdir. İkincil marketler, farklı satıcılar arasında ticaretinin gerçekleştiği çevrimiçi ticari platformlarıdır. Bakımcı firmalar açısından ikincil marketler, parça üreticisine alternatif olarak kullanılabilen bir tedarik kaynağı olarak öne çıkmaktadır.</p> <p>Bu projede sahada çalışan sermaye malının stokastik olarak artış ve azalış gösterdiği durumlarda yedek parça talebinin dağılımının karakterizasyonu için hipergeometrik dağılım ailesinden uygun dağılım seçen bir algoritma geliştirilmiştir. Simulasyon testleri ile dağılımların yedek parça talebinin modelleme performansları belirlenmiştir. Bu testlerde önerilen algoritmanın uygulamada kabul gören yaklaşıma göre çok daha iyi sonuçlar verdiği bulgulanmıştır. Talep modellemesinden sonra ikincil marketlerin varlığında optimum envanter kontrol politikasının analizine odaklanılmıştır. Burada Markovyan kapasiteye sahip ikincil marketlerin varlığında optimum politika analiz edilmiştir. Optimum politikanın karakterize edilebildiği koşulların belirlenmesinden sonra, durağan ve durağan olmayan talep dağılımları için sezgisel metotların adaptasyonu ve performanslarının ölçülmesi gerçekleştirilmiştir.</p> <p>Son olarak, projede yer almamasına rağmen, projede geliştirilen teorik sonuçların bir uygulaması olarak yaşam döngülerinin sonunda olan ürünlerin ekonomik yaşamlarını uzatmak için yapılacak yatırımların fizibilite analizi ve optimum yatırım politikasının karakterizasyonu gerçekleştirilmiştir.</p> <p>Bu araştırma projesinde 1 yürütücü (Dr. Öğr. Üy. Mustafa Hekimoğlu), 1 araştırmacı (Doç. Dr. Deniz Karlı), 2 yüksek lisans öğrencisi (Ali Kök ve Zülal İşler) çalışmıştır. Elde edilen sonuçlar prestijli bir akademik dergide yayınlanmak üzere gönderilmiştir.</p>
Anahtar Kelimeler:	tedarik zinciri yönetimi, yedek parça envanter kontrol, stokastik modelleme
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Evet