Yinelemeli Beklenti/En Büyükleme Algoritması ile Hareketli Kaynakların Yakın-Alan Parametrelerinin Kestirimi

Near Field Parameter Estimation of Moving Sources with Recursive Expectation Maximization Algorithm

Serap Çekli[1], Erdinç Çekli[2], Nihat Kabaoğlu[3], Hakan Ali Çırpan[1]

[1]Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
İstanbul Üniversitesi, Avcılar, İstanbul
{hcirpan,serapc}@istanbul.edu.tr
[2]Tübitak MAM, Gebze, Kocaeli
Erdinc.Cekli@mam.gov.tr
[3]Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu
Kadir Has Üniversitesi, Selimpaşa, İstanbul
nihat@khas.edu.tr

Özetçe

Bu bildiride, anten diziliminin yakınında bulunan hareketli kaynakların yaydığı sinyallerin geliş doğrultuları ve uzaklık parametrelerinin ortak kestirimi için yinelemeli en büyük olabilirlik kestirimcisi önerilmiştir. Bu bildiride yinelemeli en büyük olabilirlik kestirim algoritması, sadece rasgele olmayan sinyal modeli için geliştirilmiştir. Bu sinyal modeline ait en büyük olabilirlik işlevlerinin kapalı biçimde çözümü sağlanamadığı için, özyinelemeli beklenti/en büyükleme algoritması hareketli kaynakların yakın-alan parametrelerinin kestirimi için uyarlanmıştır. Ayrıca, önerilen algoritmanın başarımlarını destekleyen benzetim örneği sonuçları da sunulmuştur.

Abstract

In this paper, maximum likelihood (ML) estimator is proposed for the joint estimation of the direction of arrival (DOA) and range parameters of moving sources in the near-field of the antenna array. ML estimation algorithm is presented for deterministic signal model. Recursive form of the expectation maximization (REM) algoritm is suggested for the estimation of the near-field parameters because there is not closed form solutions for the maximum likelihood functions. Moreover, simulation results of the suggested algorithm are presented.

1. Giriş

Darbantlı sinyaller yayan kaynakların konumlarının yani sinyal geliş doğrultularının kestirimi için önerilen yöntemler genellikle kaynakların anten diziliminden uzakta (uzak-alan) olduğunu varsaymaktadır [1], [2], [3]. Bu varsayıma göre anten dizilimine ulaşan dalga cepheleri düzlem dalgası olarak modellenmekte, kaynakların konumları ise sadece konum açıları ile parametrelendirilmektedir.

Uzak-alan yaklaşıklığına karşılık mikrofon dizilimi kullanarak söz geliştirme, sualtı kaynak konumu kestirimi, radar ve ses ötesi imgeleme gibi birçok uygulamada kaynak anten diziliminin yakınında (Fresnel bölgesi veya yakın-alan) olabilir [4]. Bu durumda anten dizilimine ulaşan yuvarsal dalga cephelerine düzlem dalgası (uzak-alan) yaklaşıklığı uygulanamaz. Dolayısıyla anten diziliminin yakın-alanında bulunan kaynakların konumlarının kestiriminde, sinyal geliş doğrultusuyla beraber uzaklık parametresininde göz önüne alınması gerekir. Yakın-alan varsayımı sonucunda parametre vektör boyutu arttığından daha gelişmiş konum kestirim yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla, daha önceki çalışmalarda ikinci ve daha yüksek dereceli istatistiğe dayalı alt uzay tabanlı yöntemler kullanılmıştır [3], [4], [5].

Bu çalışmada ise kaynak sinyallerinin geliş doğrultuları ve uzaklık parametrelerinin ortak kestirimi için en büyük olabilirlik kestirimcileri önerilmiştir. En büyük olabilirlik kestirim yöntemleri yüksek başarım göstermelerine rağmen karmaşık bir en iyileme problemi oluştururlar. Fakat bu bildiride en iyileme problemlerinin etkin hesabı için yinelemeli beklenti/en büyükleme (Recursive Expectation / Maximization) algoritması kulanılmıştır [6].

2. Sinyal Modeli

Bu bildiride ilgilendiğimiz kestirim problemi, kaynak konumlarını ve kaynak sinyallerini elde etmek için dizilim verilerinin kullanılarak sinyallerin geliş doğrultularının ve uzaklık parametrelerinin ortak kestirimlerinin yapılmasıdır. N algılayıcılı dizi için M darbantlı sinyal zamanla değişen yönlerden gelmektedir $\boldsymbol{\theta}(t)=\left[\theta_1(t)...\theta_M(t)\right]$ ve algılayıcı çıkışlarında gözlemlenen veriler için t anında sinyal modeli $x(t)\in\mathbb{C}^{N\times 1}$;

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{u}(t), \quad t=1,2,..., \qquad (1)$$

burada dizilim yönlendirme matrisi

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}(t))=\left[\boldsymbol{d}(\theta_1(t))...\boldsymbol{d}(\theta_M(t))\right]\in\mathbb{C}^{N\times M}, \qquad (2)$$

M adet yönlendirme vektöründen $\boldsymbol{d}(\theta_m(t))\in\mathbb{C}^{N\times 1}$ $m=1,...,M$ meydana gelmektedir. Dizilim yönlendirme vektörleri yakın-alan durumunda kaynaklara ait açı ($\boldsymbol{\theta}$) ve uzaklığın ($\boldsymbol{r}$) işlevidir. $M<N$ olduğu kabul edilmiştir.

Bu çalışma 104E130 numaralı TÜBİTAK araştırma projesi tarafından desteklenmektedir.

1-4244-0239-5/06/$20.00 ©2006 IEEE

İşaretlerin dalga biçimi $\boldsymbol{s}(t)=\left[s_1(t)...s_M(t)\right]^T \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ bilinmektedir ve rasgele değildir. $(.)^T$ herhangi bir vektörün devriğini göstermektedir. Gürültü süreci $\boldsymbol{u}(t)\in \mathbb{C}^{N\times 1}$ bağımsız özdeş karmaşık ve sıfır ortalamalı normal dağılımlıdır ve özdeğişinti matrisi $\boldsymbol{v}\boldsymbol{I}$ dir, burada $\boldsymbol{v}$ bilinmeyen gürültü görünge parametresi ve $\boldsymbol{I}$ birim matristir.

Kaynak sayısı M bilinmektedir, ele alınan problem kaynakların yaydığı zamanla değişen işaretlerin geliş doğrultuları $\theta(t)$ ve uzaklık parametrelerinin $\boldsymbol{r}(t)$, yinelemeli olarak $\boldsymbol{x}(t)$ gözleminden kestirilmesidir. İterasyon başlangıcında θ^0 ve $\boldsymbol{r}^0$ için iyi bir başlangıç değeri yani parametrelerin gerçek değerine yakın değerler verildiği varsayılmaktadır.

3. Eksik Veri Kullanılarak Yinelemeli Parametre Kestirimi

$\boldsymbol{x}(1),\boldsymbol{x}(2),...$ bağımsız, $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\vartheta})$ olasılık yoğunluk işlevli gözlemler olsun, burada $\boldsymbol{\vartheta}$ bilinmeyen sabit parametredir. EM algoritmasına ilişkin eksiksiz veri $\boldsymbol{y}(1),\boldsymbol{y}(2),...$ olasılık yoğunluk işlevi $f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\vartheta})$ ile karakterize edilmektedir. Eksiksiz veri $\boldsymbol{y}(t)$, $\mathcal{M}(\boldsymbol{y}(t))=\boldsymbol{x}(t)$ çoktan-bire eşlemeli olarak tanımlanmıştır [7]. $\boldsymbol{\vartheta}^t$ parametresi, t gözlem sonrasında kestirilen değeri ifade etmektedir. Aşağıda verilen yordam sonuşur (asymptotic) anlamda MLE ile aynı sonuca yakınsayan gerçek parametre $\boldsymbol{\vartheta}$ değerini bulmayı amaçlamaktadır [8]:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{t+1}=\boldsymbol{\vartheta}^t+\varepsilon_t \boldsymbol{\ell}_{EM}\left(\boldsymbol{\vartheta}^t\right)^{-1}\boldsymbol{\gamma}\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\vartheta}^t\right), \tag{3}$$

denklemdeki ε_t adım aralığını belirtmektedir ve aşağıda verilen denklemler ise sırası ile eksiksiz bilgi matrisi ile gradyan vektörünü göstermektedir. Burada ∇_{ϑ}, $\boldsymbol{\vartheta}$' ye göre sütun gradyan vektörüdür,

$$\boldsymbol{\ell}_{EM}\left(\boldsymbol{\vartheta}^t\right)=E\left[-\nabla_{\vartheta}\nabla_{\vartheta}^T \log f(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\vartheta})\middle|\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\vartheta}\right]\Big|_{\vartheta=\vartheta^t}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\gamma}\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\vartheta}^t\right)=\nabla_{\vartheta}\log f\left(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\vartheta^t} \tag{5}$$

Eksiksiz veri $\boldsymbol{y}$, gözlemlenen veri $\boldsymbol{x}$ 'den daha basit bir yapıdadır, dolayısıyla eksiksiz veri bilgi matrisini $\boldsymbol{\ell}_{EM}\left(\boldsymbol{\vartheta}^t\right)$ hesaplamak kolaylaşmaktadır.

4. Geliş Doğrultusu ve Uzaklık Parametresinin Kestirim Algoritması

Bu çalışmada, algılayıcı dizisine gelen alınan işaretler vasıtası ile açı ve uzaklık parametrelerinin yakın alanda takibi hedeflenmiştir.

$\boldsymbol{x}(t)$ gözlem dizisi karmaşık ve normal dağılımdadır, logaritmik olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned}&\log f\left(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{\vartheta}\right)\\&=-\Big[N\log\pi+N\log\upsilon\\&+\frac{1}{\upsilon}\left(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{s}(t)\right)^H\left(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{s}(t)\right)\Big]\end{aligned} \tag{6}$$

burada $\boldsymbol{\vartheta}=\left[\boldsymbol{\theta}(t)^T\ \boldsymbol{s}(t)^T\ \upsilon\right]^T$ ve $(.)^T$ Hermit devriğini göstermektedir. Algoritmada $\boldsymbol{\vartheta}$ daki parametreler eşzamanlı olarak güncellenmelidir. Temel olarak $\boldsymbol{\theta}(t)$ ve $\boldsymbol{r}(t)$ parametreleri ile ilgilendiğimiz için algoritma sadece bu parametreler için uygulanmıştır. İşaret dalga biçimi ve gürültü için yapılan kestirimler sırası ile $\boldsymbol{s}^t=\left[s_1^t s_2^t...s_M^t\right]^T$ ve υ^t ile ifade edilmektedir.

Eksiksiz veri $\boldsymbol{y}(t)$, dizi çıkışını işaret ve gürültü bileşenlerine ayırarak elde edilmektedir.

$$\boldsymbol{y}(t)=\left[\boldsymbol{y}_1(t)^T...\boldsymbol{y}_m(t)^T...\boldsymbol{y}_M(t)^T\right]^T, \tag{7}$$

şeklinde ifade edilmektedir. m. işarete ilişkin eksiksiz veri

$$\boldsymbol{y}_m(t)=\boldsymbol{d}(\theta_m)s_m(t)+\boldsymbol{u}_m(t), \tag{8}$$

kompleks ve normal dağılımdadır, ve özdeğişinti matrisi $\sum_{m=1}^{M}\upsilon_m=\upsilon$ koşulu altında $\upsilon_m\boldsymbol{I}$ dır, $\upsilon_m=\upsilon/M$ olarak seçilmektedir. Ve logaritmik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}&\log f\left(\boldsymbol{y}(\theta);\boldsymbol{\vartheta}\right)=-\sum_{m=1}^{M}\Big[N\log\pi+N\log\left(\frac{\upsilon}{M}\right)\\&+\frac{M}{\upsilon}\left(\boldsymbol{y}_m(t)-\boldsymbol{d}(\theta_m)s_m(t)\right)^H\\&\times\left(\boldsymbol{y}_m(t)-\boldsymbol{d}(\theta_m)s_m(t)\right)\Big]\end{aligned}, \tag{9}$$

olarak verilmektedir.

Hareketli kaynaklar aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0+t\boldsymbol{\theta}_1, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{r}_1, \tag{11}$$

burada $\boldsymbol{\theta}_0=\left[\theta_{01},...,\theta_{0M}\right]^T$ ve $\boldsymbol{\theta}_1=\left[\theta_{11},...,\theta_{1M}\right]^T$ $\boldsymbol{r}_0=\left[r_{01},...,r_{0M}\right]^T$ ve $\boldsymbol{r}_1=\left[r_{11},...,r_{1M}\right]^T$ dir. Geliş doğrultuları ve uzaklıkları $\boldsymbol{\Theta}=\left[\boldsymbol{\Theta}_1^T...\boldsymbol{\Theta}_m^T...\boldsymbol{\Theta}_M^T\right]^T$ ile gösterilmektedir ve burada $\boldsymbol{\Theta}_m=\left[\theta_{0m},\theta_{1m},r_{0m},r_{1m}\right]^T$ dır.

Yinelemeli beklenti/en büyükleme algoritması doğrultu ve uzaklık parametresi $\boldsymbol{\Theta}$ için uygulanmaktadır.

Bu yaklaşıma dayanarak gradyan vektörünün $\gamma\left(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{\upsilon}^t\right)$, $2m$. ve $(2m+1)$. bileşenleri

$$\frac{\partial}{\partial \theta_{0m}} \log f\left(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\vartheta^t}$$
$$= \frac{2}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right)\boldsymbol{s}^t\right)^H \left(\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)\right], \tag{12}$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta_{1m}} \log f\left(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\vartheta^t}$$
$$= \frac{2t}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right)\boldsymbol{s}^t\right)^H \left(\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)\right],$$

$,(2m+2).$ ve $(2m+3).$ bileşenleri

$$\frac{\partial}{\partial r_{0m}} \log f\left(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\vartheta^t}$$
$$= \frac{2}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right)\boldsymbol{s}^t\right)^H \left(\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)\right], \tag{13}$$
$$\frac{\partial}{\partial r_{1m}} \log f\left(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{\vartheta}\right)\Big|_{\vartheta=\vartheta^t}$$
$$= \frac{2t}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right)\boldsymbol{s}^t\right)^H \left(\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)\right],$$

burada sırası ile $\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) = \partial \boldsymbol{d}\left(\theta_m\right) / \partial \theta_m \Big|_{\theta_m=\theta^t_{0m}+t\theta^t_{1m}}$

$\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) = \partial \boldsymbol{d}\left(r_m\right) / \partial r_m \Big|_{r_m=r^t_{0m}+tr^t_{1m}}$.

Eksiksiz veri matrisi blok köşegen olduğundan tekilliği önlemek ve yinelemeleri kolaylaştırmak için blok köşegen matris yerine $\ell_{EM}\left(\boldsymbol{\upsilon}^t\right)$ in köşegen parçası olan matris kullanılmaktadır.

$$\boldsymbol{d}''\left(\Theta^t_m\right) = \partial^2 \boldsymbol{d}\left(\theta_m\right) / \partial \theta^2_m \Big|_{\theta_m=\theta^t_{0m}+t\theta^t_{1m}}$$

olarak verildiğine göre,
$\tilde{\ell}_{EM}\left(\boldsymbol{\upsilon}^t\right)$ matrisinin $2m.$, $(2m+1).$, $(2m+2).$ ve $(2m+3).$ bileşenleri

$$\frac{2}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{d}''\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)^H \left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right) s^t_m\right)\right.$$
$$+M \left\|\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right\|^2, \quad , \tag{14}$$
$$\frac{2t^2}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{d}''\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)^H \left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right) s^t_m\right)\right.$$
$$+M \left\|\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right\|^2,$$

$$\boldsymbol{d}''\left(\Theta^t_m\right) = \partial^2 \boldsymbol{d}\left(r_m\right) / \partial r^2_m \Big|_{r_m=r^t_{0m}+tr^t_{1m}}$$

$$\frac{2}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{d}''\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)^H \left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right) s^t_m\right)\right.$$
$$+M \left\|\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right\|^2, \quad , \tag{15}$$
$$\frac{2t^2}{\upsilon^t} \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{d}''\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right)^H \left(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{H}\left(\Theta^t\right) s^t_m\right)\right.$$
$$+M \left\|\boldsymbol{d}'\left(\Theta^t_m\right) s^t_m\right\|^2,$$

Θ^{t+1} kestirildiğinde işaret ve gürültü parametreleri en büyük olabilirlik kestirim algoritmasına ile Θ^{t+1} ve $\boldsymbol{x}(t)$ ' ye göre aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}^{t+1} &= \boldsymbol{H}\left(\theta^{t+1}\right)^{\#} \boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{\upsilon}^{t+1} &= \frac{1}{N} tr\left[\boldsymbol{P}\left(\theta^{t+1}\right)^{\perp} \hat{\boldsymbol{C}}_x(t)\right], \end{aligned} \tag{16}$$

burada $\boldsymbol{H}\left(\theta^{t+1}\right)^{\#}$ matrisi, $\boldsymbol{H}\left(\theta^{t+1}\right)$ matrisinin sözde tersini ifade etmektedir, $\boldsymbol{P}\left(\theta^{t+1}\right)^{\perp} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}\left(\theta^{t+1}\right)$ ile verilen matris, $\boldsymbol{P}\left(\theta^{t+1}\right) = \boldsymbol{H}\left(\theta^{t+1}\right)\boldsymbol{H}\left(\theta^{t+1}\right)^{\#}$ izdüşüm matrisinin ortogonal tümleyenidir ve $\hat{\boldsymbol{C}}_x(t) = \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t)^H$ dir.

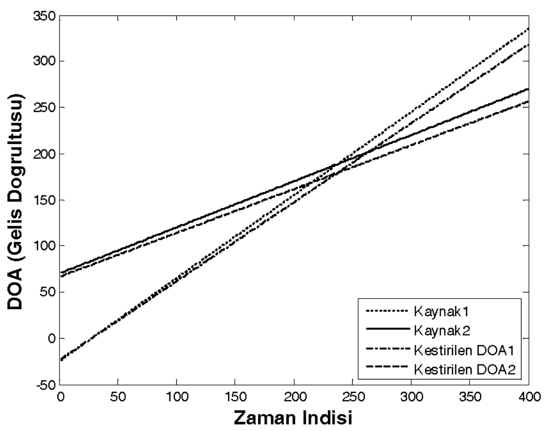
5. Benzetim Sonuçları

Benzetim örneğinde 15 anten ve 2 kaynaktan alınan rasgele olmayan işaretler için yakın-alan senaryosu ele alınmıştır. Hareketli kaynaklar birbirinden farklı konumlarda işaret yaymaktadır, farklı açı ve uzaklık değerlerine sahiptir. Senaryoda hedefler yani kaynaklar 400 zaman adımı boyunca takip edilmiştir. Her adımda, gözlemlenen veri kullanılarak alınan işaret ve gürültü süreci güncellenmekte ve daha sonra kestirilmek istenen parametre vektörünün güncellenmesi esnasında kullanılmaktadır. Algoritmanın her adımında eksiksiz bilgi matrisi ve gradyan vektörü hesaplanmaktadır. Adım uzunluğu algoritmanın kararlı şekilde çalışması için uygun sabit bir değer olarak seçilmiştir ve işaret gürültü oranının 30 dB olduğu belirlenmiştir. Şekil 1' de doğrusal hareket yapan kaynakların geliş doğrultusu ve kaynakların hareket yörüngesi gösterilmiştir. Her iki kaynağın gerçek açı ve uzaklık parametreleri değerleri ile parametrelerin zaman adımları boyunca kestirilen değerleri, hedeflerin takibi şekil 1' de görülmektedir. Şekil 2' de hareketli kaynakların yakın-alan için kestirilen geliş doğrultusu ve uzaklık parametresi değerleri için ortalama karesel hatalar gösterilmiştir.

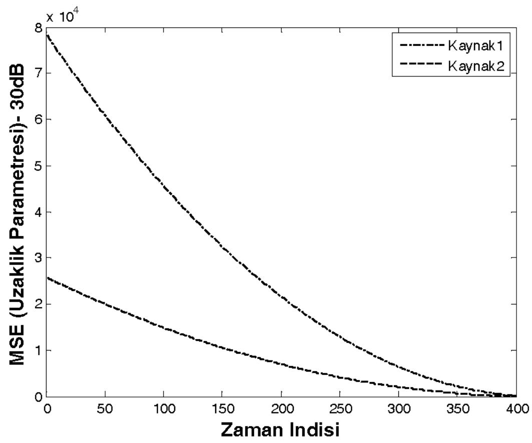
6. Sonuçlar

Bu çalışmada sinyallerin geliş doğrultuları ve uzaklık parametrelerinin kestirimi için yinelemeli beklenti/en büyükleme algoritması önerilmiştir.
İşaret gürültü oranının belli bir değerin üzerinde bulunduğu durumda algoritmanın başarım açısından çok büyük bir farklılık göstermediği görülmüştür. Anten sayısı azaltıldığı durumda ise algoritma hemen hemen aynı başarımı göstermiştir. Adım uzunluğunun değişimi ile hesaplama yükü değişmektedir ve uygun seçilen adım uzunluğu ile hesaplama

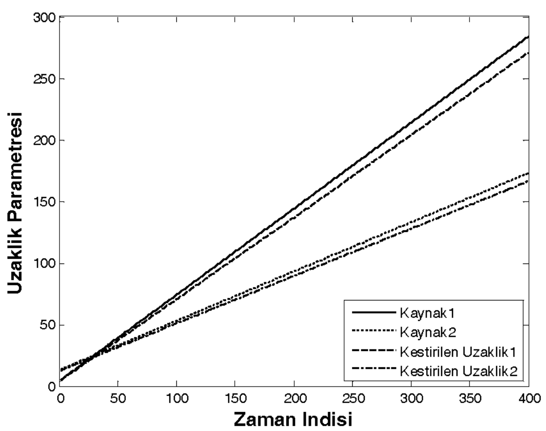
süreci azalmaktadır. Ayrıca, iyi bir başlangıç değeri seçimi algoritmanın başarımında önemli rol oynamaktadır.



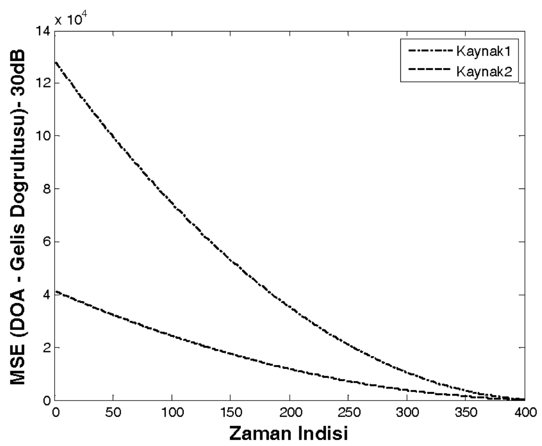
Şekil 1.a. Hareketli Kaynakların Geliş Doğrultusu ve Takibi



Şekil 2. Kaynakların Uzaklık Parametresi için Karesel Hata



Şekil 1.b. Hareketli Kaynakların Uzaklığı ve Kaynak Takibi



Şekil 2. Kaynakların Geliş Doğrultusu için Karesel Hata

7. Kaynakça

[1] P. Stoica, B. Ottersten, M. Viberg, and R. L., Moses, "Maximum Likelihood Array processing for stochastic Coherent Sources", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 44, No. 1, January 1996.

[2] M. I. Miller, D. R. Fuhrmann, "Maximum-Likelihood Narrow-Band Direction Finding and the EM Algorithm", IEEE Trans. Acoustics. Speech, and Signal Processing, vol.38, pp.1560-1577, Sept 1990.

[3] M. Harrdt, "Efficient One-, Two, and Multidimensional High-Resolution Array Signal Processing", Ph.D. dissertation, Technische Universit\"at München, 1997.

[4] R. N. Challa and S. Shamsunder, "High-Order Subspace-Based Algorithms for Passive Localization of Near-Field Sources", {\em in Proc.29th Asimolar Conf. on Signals, Systems, and Computers}, vol.2, pp.777-781, Pacific Grove, CA. Nov.1995, IEEE Computers Society Press.

[5] E. Çekli, H. A. Çırpan, "Unconditional Maximum Likelihood Approach for Localization of Near-Field Sources: Algorithm and Performance Analysis", AEÜ – International Journal of Electronics and Communications, vol. 57, no. 1, pp. 9-15, 2003.

[6] P. J. Chung, J. F. Böhme, A. O. Hero, "Tracking of Multiple Moving Sources Using Recursive EM Algorithm ", EUROSIP Journal on Applied Signal Proces. 2005:1, 50-60.

[7] A. P. Dempster, N. Laird, and D.B. Rubin, "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm", J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, vol.39, no. 1,pp. 1-38, 1977.

[8] D. M. Titterington, A. F. Smith, and U. E. Makov, "Stastical Analysis of Finite Mixture Distributions", John & Sons, New York, NY, USA, 1985.